





THEORIE

DER

BESSEL'SCHEN FUNCTIONEN.

EIN ANALOGON

ZUR THEORIE DER KUGELFUNCTIONEN

VON

CARL NEUMANN,

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1867.

THEORIE

DER

BESSEL'SCHEN FUNCTIONEN.

EIN ANALOGON

ZUR THEORIE DER KUGELFUNCTIONEN

VON

CARL NEUMANN,

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1867.

VORWORT.

Die Bemerkung, dass dieselbe elegante Methode, durch welche Cauchy zur Begründung der Taylor-Maclaurin'schen Entwicklungen gelangt war, auch benutzt werden könne zur Begründung der Legendre-Laplace'schen Entwicklungen, musste fast nothwendig den Eindruck hervorrufen, als seien die genannten Entwicklungen nur einzelne Bruchstücke eines noch unbekannten grösseren Ganzen. Fast nothwendig also musste der Gedanke sich erheben, ob jene Cauchy'sche Methode nicht vielleicht hinleiten könne zur Entdeckung neuer Entwicklungen, welche, statt nach Potenzen oder Kugelfunctionen, nach irgend welchen anderen Functionen fortschreiten.

Bei einem Versuche dieser Art durften wohl solche Functionen die meiste Aussicht auf günstigen Erfolg darbieten, welche zu den Kugelfunctionen in irgend einem Grade der Verwandtschaft stehen. Verwandt mit den Kugelfunctionen sind aber, wie meine Untersuchungen über Wärme und Elektricität (Borchardt's Journal. Band 62, Seite 42) zufälliger Weise gezeigt haben, die Bessel'schen Functionen J^n.

So lag es denn nahe zu untersuchen, ob man nicht mit Hülfe jener Cauchy'schen Methode zur Begründung von Entwicklungen gelangen könne, welche fortschreiten nach diesen Bessel'schen Functionen. Die vorliegende Schrift wird zeigen, dass derartige Entwicklungen in der That existiren, und die allgemeinen Gesetze derselben feststellen. Sie wird zeigen, dass diese neuen Entwicklungen in gewisser Hinsicht sogar einfacher sind als die Legendre'schen Entwicklungen, ebenso einfach wie die Taylor'schen. Sie wird nämlich zeigen, dass die neuen Entwicklungen, ähnlich wie die Taylor'schen, hin-

sichtlich ihrer Convergenz und Gültigkeit gebunden sind an Gebiete von circularer Begrenzung, während die Legendreschen Gebiete von elliptischer Begrenzung besitzen.

Uebersicht und Verständniss meiner Untersuchungen werden erleichtert werden durch einige vorläufige Bemerkungen über den Gang derselben.

Um die Cauchy'sche Methode verwenden zu können, entwickle ich *im ersten Abschnitt* den Ausdruck $(y-x)^{-1}$, auf übrigens sehr hypothetischem Wege, in eine nach den $J^n(x)$ fortschreitende Reihe, und bezeichne die von y abhängenden Coefficienten dieser Entwicklung mit $\varepsilon_n\, O^n(y)$, wo ε_n eine Zahl repräsentirt, welche für $n=0$ den Werth 1, für $n>0$ den Werth 2 hat. Nachdem die so erhaltenen Functionen $O^n(y)$, ebenso wie die $J^n(x)$ selber, einer näheren Betrachtung unterworfen sind, folgt sodann *im zweiten Abschnitt* eine Untersuchung von entgegengesetzter Richtung und von völlig strengem Charakter. Diese Untersuchung nimmt ihren Ausgang von der vorhin gefundenen Reihe, deren allgemeines Glied gleich $\varepsilon_n J^n(x)\, O^n(y)$ ist; sie zeigt, dass diese Reihe convergent sein muss, sobald $mod\ x < mod\ y$, und dass sie ferner im Falle der Convergenz gleichwerthig sein muss mit dem Ausdruck $(y-x)^{-1}$. Diese Ergebnisse bilden den eigentlichen Kern der Theorie.

Mit grosser Leichtigkeit führt nun die Cauchy'sche Methode zu dem Resultat, dass eine gegebene Function, welche hinsichtlich ihrer Eindeutigkeit und Stetigkeit gewissen Bedingungen entspricht, immer entwickelbar ist in eine nach den J^n fortschreitende Reihe, oder auch in eine nach den J^n und O^n fortlaufende Doppelreihe. Aus diesen Angaben wird bereits ersichtlich sein, dass die neu eingeführten Functionen O^n zu den Bessel'schen Functionen J^n in analoger Beziehung stehen, wie die Kugelfunctionen zweiter Art zu denen erster Art, d. i. wie die Q^n zu den P^n. Demgemäss scheint

es mir erlaubt und zweckmässig, die J^n als Bessel'sche Functionen erster Art, die O^n als Bessel'sche Functionen zweiter Art zu bezeichnen.

Die Kugelfunctionen P^n und Q^n sind bekanntlich zu einander complementär in Bezug auf eine gewisse Differential-Gleichung zweiter Ordnung, nämlich die beiden particulären Lösungen dieser Gleichung. Anders verhält es sich mit den Functionen J^n und O^n; denn die Besselsche Differential-Gleichung, welcher die J^n Genüge leisten, wird durch die O^n keineswegs erfüllt. Allerdings würde man durch einfache Operationen eine andere Differential-Gleichung zweiter Ordnung, in Bezug auf welche J^n und O^n jenen complementären Charakter besitzen, mit Leichtigkeit aufzustellen im Stande sein; wahrscheinlich aber würde diese Gleichung von complicirter Natur werden.

In Bezug auf die Bessel'sche Differential-Gleichung ist die Function J^n also nicht complementär zu O^n, sondern complementär zu einer gewissen anderen Function Y^n, deren Untersuchung den Gegenstand des *dritten Abschnittes* ausmacht. Im *vierten Abschnitt* endlich werden gewisse partielle Differential-Gleichungen behandelt, bei deren Integration die Functionen J^n und Y^n eine ähnliche Rolle spielen, wie die Kugelfunctionen P^n und Q^n bei der Integration der bekannten Differential-Gleichung des Potentiales.

Alles, was im Gebiet der Bessel'schen Functionen im Laufe der Zeit zu Tage getreten ist, zu einem einheitlichen Ganzen zu verbinden, dürfte eine schwierige Aufgabe sein. Die vorliegende Schrift hat keine solche universelle Tendenz; sie berührt nur diejenigen Punkte jenes Gebietes, welche nicht zu fern abliegen von ihrer eigenen individuellen Richtung.

Tübingen, den 7. April 1867.

C. Neumann.

Literatur der Bessel'schen Functionen.

Fourier. Théorie analytique de la chaleur. Seite 369. (1822.)

Poisson. Sur la distribution de la chaleur dans les corps solides. Journal de l'école polyt. Cahier 19. Seite 349. (1823.)

Bessel. Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht. Abh. der Berl. Akad. der Wiss. (aus dem Jahr 1824).

Jacobi. Formula transformationis integralium definitorum. Crelle's Journal. Bd. 15. Seite 13. (1836.)

Hansen. Ermittelung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung. 1. Theil. Schriften der Sternwarte Seeburg. (Gotha 1843.)

Anger. Untersuchungen über die Function J_k^h, mit Anwendungen auf das Kepler'sche Problem. (Danzig 1855.)

Schlömilch. Ueber die Bessel'sche Function. Zeitschrift für Mathematik und Physik. II. Jahrgang. Seite 137. (1857.)*)

Lipschitz. Ueber die Bessel'sche Transcendente J. Borchardt's Journal. Band 56. Seite 189. (1859.)

C. Neumann. Ueber die Theorie der Wärme und Elektricität. Borchardt's Journal. Band 62. Seite 42. (1863.)

Es dürfte angemessen sein, aus der vorstehenden Literatur namentlich zwei Sätze hervorzuheben, weil sie verwandt sind mit dem Gegenstande der vorliegenden Untersuchungen. Es sind folgende:

Fourier'scher Satz. Die Function

$$J^0(x) = 1 - \frac{x^2}{2\cdot 2} + \frac{x^4}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4} - \frac{x^6}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6} + \cdots\cdots$$

verschwindet für unendlich viele reelle Werthe von x. Bezeichnet man diese ihrer Grösse nach geordnet mit ϑ, so kann jede innerhalb des Intervalles $0\ldots\ldots 1$ willkürlich gegebene Function $f(x)$ in eine nach den $J^0(\vartheta x)$ fortschreitende Reihe entwickelt werden.

Schlömilch'scher Satz. Bezeichnet man die Hälften der ganzen Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$ mit n, so kann jede innerhalb des Intervalles $0\ldots\ldots\pi$ willkürlich gegebene Function $f(x)$ in eine nach den $J^0(nx)$ [oder auch nach den $J^1(nx)$] fortschreitende Reihe entwickelt werden.

---

*) Leider ist mir dieser Aufsatz erst bekannt geworden nach Beendigung des Druckes. Ich ersehe aus demselben, dass die Entwicklungen, welche ich Seite 39 gebe, schon von Schlömilch gefunden sind.

INHALTSVERZEICHNISS.

Einleitung.

Erinnerung an die Kugelfunctionen.

Erster Abschnitt.

Definition und Eigenschaften der Bessel'schen Functionen.

Zweiter Abschnitt.

Entwicklung nach Bessel'schen Functionen.

Dritter Abschnitt.

Die Bessel'sche Differentialgleichung.

Vierter Abschnitt.

Partielle Differentialgleichungen.

Verbesserung.

Auf Seite 39, Zeile 4 mag statt der Worte:
welche innerhalb der gegebenen ringförmigen Fläche liegt, und ein....
die deutlichere Ausdrucksweise substituirt werden:
welche der gegebenen ringförmigen Fläche angehört, und ein....

Einleitung.

Erinnerung an die Kugelfunctionen.

§ 1. Cauchy's Theorem.

Sind die Werthe einer Function $f(z)$ eindeutig und stetig innerhalb eines endlichen Gebietes $\mathfrak{A}$, so sind sie darstellbar durch ein Integral, welches hinläuft über den Rand von $\mathfrak{A}$. Ist nämlich c irgend ein Punct innerhalb $\mathfrak{A}$, und sind z die Randpuncte von $\mathfrak{A}$, so gilt die schon von Cauchy aufgestellte Formel:

$$(1) \qquad f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)\, dz}{z-c},$$

wo die Integration positiv herumläuft um $\mathfrak{A}$.

Besitzt die Fläche $\mathfrak{A}$ mehrere, etwa n Randcurven, so verwandelt sich das Integral in eine Summe von n Integralen, jedes derselben hinerstreckt über je eine der n Randcurven.

Was die positive Umlaufung von $\mathfrak{A}$ anbelangt, so ist (namentlich mit Bezug auf den Fall mehrerer Randcurven) Folgendes zu bemerken. Zu Grunde gelegt wird bei dieser Ausdrucksweise ein in der zEbene festgesetztes Coordinatensystem von solcher Beschaffenheit, dass der im Anfangspunct Stehende und in der Richtung der reellen Achse Fortsehende die Richtung der imaginären Achse markiren würde mit ausgestreckter Linken. Dies vorausgesetzt, ist bei jeder Randcurve von $\mathfrak{A}$ unter der positiven Richtung diejenige zu verstehen, in welcher die Curve durchwandert werden muss, falls man das angrenzende Flächengebiet beständig zur Linken haben will.*)

*) Vergl. hierüber, sowie in Betreff der Ableitung der Formel (1) meine „Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale" Seite 71 und 86.

puncten ± 1, so bleibt die vorstehende Reihe (wie aus Heine's Untersuchungen hervorgeht) convergent und gültig, so lange der Punct x auf einer engeren, der Punkt y auf einer weiteren Ellipse sich befindet. Mit Rücksicht hieraus führt nun die Cauchy'sche Formel (1.), wenn man den Bruch $\frac{1}{z-c}$ mit Hülfe der Heine'schen Reihe (8.) entwickelt, zu folgenden Resultaten.

Erster Satz. Für jede Function $f(z)$, welche innerhalb einer Ellipse mit den Brennpuncten ± 1 eindeutig und stetig bleibt, existirt eine Entwicklung:

$$f(z) = \alpha_0 P^0(z) + \alpha_1 P^1(z) + \alpha_2 P^2(z) + \cdots\cdots, \tag{9}$$

welche gültig) ist für alle Puncte im Innern der Ellipse.*

Zweiter Satz. Für jede Function $f(z)$, welche eindeutig und stetig bleibt auf der von zwei confocalen Ellipsen mit den Brennpuncten ± 1 begrenzten ringförmigen Fläche, existirt eine Entwicklung:

$$\begin{aligned} f(z) = {} & \alpha_0 P^0(z) + \alpha_1 P^1(z) + \alpha_2 P^2(z) + \cdots\cdots \\ & + \beta_0 Q^0(z) + \beta_1 Q^1(z) + \beta_2 Q^2(z) + \cdots\cdots\cdot, \end{aligned} \tag{10}$$

welche gültig ist für alle Puncte jener ringförmigen Fläche.

Die constanten Coefficienten α und α, β in diesen Entwicklungen (9.) und (10.) können unmittelbar erhalten werden durch Anwendung der in (6.) aufgeführten Integraleigenschaften. Ebenso ergiebt sich mit Hülfe dieser Integraleigenschaften augenblicklich, dass bei einer gegebenen Function $f(z)$ die Ausführung der Entwicklung (9.) oder (10.) immer nur auf einerlei Art möglich ist.

Die angegebenen beiden Sätze haben in neuester Zeit eine wichtige Erweiterung erhalten durch eine Untersuchung von Thomé. Thomé zeigt nämlich**), dass die Entwicklungen (9.) und (10.), ohne Beeinträchtigung ihres Gültigkeits - Gebietes, beliebig oft nach z differenzirt werden können.

---

*) Wenn eine Entwicklung gültig genannt wird innerhalb irgend welcher Grenzen, so versteht sich von selber, dass sie innerhalb dieser Grenzen auch convergent ist. Denn die Convergenz ist ein nothwendiger Bestandtheil der Gültigkeit.

In gleicher Weise betrachte ich (wie hier zu bemerken nicht überflüssig sein wird) das Endlichbleiben einer Function als einen nothwendigen Bestandtheil ihrer Stetigkeit.

**) Borchardt's Journal. Bd. 66. Seite 337.

Erster Abschnitt.

Definition und Eigenschaften der Bessel'schen Functionen.

§ 5. Die Bessel'schen Functionen erster Art J^n.

Die neuen Entwicklungen, welche den eigentlichen Gegenstand der gegenwärtigen Abhandlung bilden, laufen fort nach zweierlei Functionen $J^n(z)$ und $O^n(z)$, welche in ihrer gegenseitigen Beziehung grosse Aehnlichkeit zeigen mit den Functionen $P^n(z)$ und $Q^n(z)$, welche indessen nicht ein und derselben Differential-Gleichung zugehören.

Die Function $J^n(z)$ ist identisch mit der Bessel'schen Function. Sie ist eine particuläre Lösung der Gleichung:

$$(1.)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\,\frac{\partial F}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) F = 0$$

und dargestellt durch die stets convergente Reihe:

$$(2.a)\quad J^n(z) = \frac{z^n}{2\cdot 4 \cdots 2n}\left(1 - \frac{z^2}{2\cdot 2n+2} + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot 2n+2\cdot 2n+4} - \cdots\cdots\cdots\right).$$

Um diese Reihe*) (namentlich mit Bezug auf den Fall $n=0$) in unzweideutiger Weise hinzustellen, ist es gut, sie so zu schreiben:

$$(2.b)\quad J^n(z) = \frac{z^n}{2^n \Pi n}\left(1 - \frac{z^2}{2\cdot 2n+2} + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot 2n+2\cdot 2n+4} - \cdots\cdots\right),$$

wo Πn die von Gauss eingeführte Function vorstellt, wo also

---

*) Das Gesetz, nach welchem diese Reihe fortschreitet, ist leicht zu übersehen. Das nächstfolgende Glied in der Parenthese würde lauten:

$$-\frac{z^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2n+2\cdot 2n+4\cdot 2n+6}.$$

Die Vorzeichen sind alternirend.

$\Pi 0 = 1,$

$\Pi 1 = 1, \qquad \Pi 2 = 1 \cdot 2, \qquad \Pi 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3, \qquad$ etc. etc.

ist. Durch weitere Anwendung dieser Gauss'schen Function kann die Reihe für $J^n(z)$ auch so dargestellt werden:

$$(2.c) \qquad J^n(z) = \frac{1}{\Pi 0\, \Pi n}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{\Pi 1\, \Pi n+1}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{\Pi 2\, \Pi n+2}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+4} - \ldots\ldots$$

Endlich kann der Werth von $J^n(z)$ auch ausgedrückt werden vermittelst eines bestimmten Integrales, nämlich:

$$(2.d) \qquad J^n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\,(z \sin \omega - n\omega)\, d\omega.$$

Diese letzte Formel bildet, beiläufig bemerkt, die ursprüngliche Definition von $J^n(z)$, wie sie von Bessel gegeben wurde.*) Ausserdem hat Bessel noch folgende andere Integral-Darstellung gefunden:

$$(2.d') \qquad J^n(z) = \frac{z^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1}\, \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\,(z \cos \omega)\, \sin^{2n} \omega\, d\omega,$$

welche später von Jacobi von Neuem abgeleitet wurde durch Anwendung einer sehr merkwürdigen allgemeinen Methode.**)

§ 6. Entwicklung von cos (z sin ω) und sin (z sin ω) nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von ω.

Die Formel (2.d) kann so geschrieben werden:

$$(3.) \qquad J^n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos\,(z \sin \omega) \cos n\omega + \sin\,(z \sin \omega) \sin n\omega]\, d\omega.$$

Hieraus ergiebt sich leicht:

$$(4.a) \qquad J^n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\,(z \sin \omega) \cos n\omega\, d\omega \qquad \text{für jedes gerade } n,$$

und andererseits:

---

*) Bessel: „Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht.“ Abhandlung. der Math. Classe der Berliner Akademie, aus dem Jahre 1824. S. 22.

**) Jacobi: „*Formula transformationis integralium definitorum.*“ Crelle's Journal Bd. 15. Seite 13.

$$(4.b) \qquad J^n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(z \sin \omega) \sin n\omega \, d\omega \quad \text{für jedes ungerade } n,$$

Aus den Formeln $(4.a)$ und $(4.b)$ aber folgt unmittelbar, dass die Entwicklungen von $\cos(z \sin \omega)$ und $\sin(z \sin \omega)$ nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von ω mit Coefficienten behaftet sind, welche identisch sein müssen mit den $J^n(z)$. So ergeben sich die (schon von Bessel aufgestellten) Formeln:

$$(5.a) \quad \cos(z \sin \omega) = J^0(z) + 2J^2(z) \cos 2\omega + 2J^4(z) \cos 4\omega + \cdots\cdots$$

$$(5.b) \quad \sin(z \sin \omega) = 2J^1(z) \sin \omega + 2J^3(z) \sin 3\omega + 2J^5(z) \sin 5\omega + \cdots\cdots$$

Hieraus folgen leicht die später nothwendigen Formeln:

$$(6.a) \qquad 1 = J^0(z) + 2J^2(z) + 2J^4(z) + 2J^6(z) + \cdots\cdots$$

$$(6.b) \qquad z = 2\cdot 1 J^1(z) + 2\cdot 3 J^3(z) + 2\cdot 5 J^5(z) + 2\cdot 7 J^7(z) + \cdots\cdot;$$

denn $(6.a)$ ergiebt sich aus $(5.a)$, sobald man $\omega = 0$ setzt; und $(6.b)$ wird erhalten, wenn man $(5.b)$ nach ω differenzirt, und sodann wiederum $\omega = 0$ setzt.

Die Gleichungen $(6.a, b)$ lassen sich übrigens, mehr symmetrisch, auch so darstellen:

$$(7.a) \qquad 1 = \varepsilon_0 J^0(z) + \varepsilon_2 J^2(z) + \varepsilon_4 J^4(z) + \varepsilon_6 J^6(z) + \cdots\cdot$$

$$(7.b) \qquad z = 1\varepsilon_1 J^1(z) + 3\varepsilon_3 J^3(z) + 5\varepsilon_5 J^5(z) + 7\varepsilon_7 J^7(z) + \cdots\cdot,$$

wo ε_n eine Constante vorstellt, welche später noch vielfach benutzt werden soll, welche $= 1$ ist für $n = 0$, und $= 2$ ist für $n > 0$.

Die Entwicklungen $(5.a, b)$ führen, wie hier beiläufig bemerkt werden mag, zu einer nenen gemeinschaftlichen Darstellung sämmtlicher Functionen J durch ein bestimmtes Integral.

Substituirt man nämlich in jenen Entwicklungen $\eta + \frac{\pi}{2}$ an Stelle von ω, so erhält man:

$$(8.a) \quad \cos(z \cos \eta) = J^0 - 2J^2 \cos 2\eta + 2J^4 \cos 4\eta - 2J^6 \cos 6\eta + 2J^8 \cos 8\eta - \cdots\cdot,$$

$$(8.b) \quad \sin(z \cos \eta) = 2J^1 \cos \eta - 2J^3 \cos 3\eta + 2J^5 \cos 5\eta - 2J^7 \cos 7\eta + \cdots\cdot,$$

wo $J^0, J^1, J^2, \cdots$ zur Abkürzung gesetzt sind für $J^0(z), J^1(z), J^2(z), \cdots$

Durch Benutzung der Grösse $i = \sqrt{-1}$ können wir diesen Formeln folgende Gestalt verleihen:

$$(9.a) \quad \cos(z \cos \eta) = J^0 + 2i^2 J^2 \cos 2\eta + 2i^4 J^4 \cos 4\eta + 2i^6 J^6 \cos 6\eta + \cdots\cdot$$

$$(9.b) \qquad i \sin(z\cos\eta) = 2i\, J^1 \cos\eta + 2i^3 J^3 \cos 3\eta + 2i^5 J^5 \cos 5\eta + \cdots\cdots$$

Hieraus folgt durch Addition:

$$(10) \qquad e^{iz\cos\eta} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n\, i^n\, J^n \cos n\eta,$$

wo die Summation über alle positive ganze Zahlen hinläuft, und ε_n die vorhin eingeführte Constante vorstellt.

Aus dieser Entwicklung (10) ergiebt sich nun unmittelbar (statt J^n setzen wir wieder $J^n(z)$):

$$(11) \qquad i^n J^n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{iz\cos\eta} \cos n\eta\, d\eta,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(12) \qquad J^n(z) = \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^\pi e^{iz\cos\eta} \cos n\eta\, d\eta,$$

eine Formel, welche, ebenso wie die Formeln (2.d) und (2.d'), gültig ist für jedes beliebige n.

§ 7. Uebergang von der Bessel'schen Function erster Art J^n zu den Functionen zweiter Art O^n.

Die Untersuchungen dieses § werden provisorischer Natur sein, nämlich angestellt werden auf Grund und mit Hülfe hypothetischer Voraussetzungen.

Es handelt sich darum, neue Functionen aufzustellen, welche einer gewissen vorgeschriebenen Anforderung Genüge leisten. Unsere erste hypothetische Voraussetzung besteht darin, dass diese vorgeschriebene Anforderung überhaupt erfüllbar ist, besteht also in der Annahme, dass die gesuchten Funktionen wirklich existiren.

Von dieser Hypothese aus führt ein directer, völlig sicherer, aber höchst beschwerlicher Weg zu jenen unbekannten Functionen hin. Diesen Weg werden wir nicht betreten. Wir werden einen andern, indirecten Weg einschlagen, der allerdings bequem, aber äusserst unsicher ist, der nämlich nur passirbar sein wird mit Zuhülfenahme von drei Voraussetzungen, die wiederum völlig hypothetischer Natur sind.

Ob also die Functionen, zu welchen wir in solcher Weise

gelangen, der vorgeschriebenen Anforderung wirklich Genüge leisten, wird durchaus zweifelhaft sein. Und dieser Zweifel wird erst beseitigt werden in späteren §§.

Es seien x und y zwei beliebige complexe Variable, geometrisch also dargestellt durch irgend zwei Puncte in der z Ebene. Ferner seien $J^0(x)$, $J^1(x)$, $J^2(x)$, $\cdots$ die dem Argument x entsprechenden Bessel'schen Functionen. Endlich mögen mit $O^0(y)$, $O^1(y)$, $O^2(y)$, $\cdots\cdots$ die dem Argument y entsprechenden unbekannten Functionen bezeichnet werden. Die vorgeschriebene Anforderung, der diese unbekannten Functionen genügen sollen, lautet:

$$(1.a)\quad \frac{1}{y-x} = J^0(x)\,O^0(y) + 2J^1(x)\,O^1(y) + 2J^2(x)\,O^2(y) + 2J^3(x)\,O^3(y) + \cdots\cdots,$$

und kann also, mit Benutzung der früher eingeführten Constanten:

$$\varepsilon_0 = 1, \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \cdots\cdots = 2,$$

auch so ausgedrückt werden:

$$(1.b)\qquad \frac{1}{y-x} = \sum_0^\infty \varepsilon_n\ J^n(x)\ O^n(y).$$

Die unbekannten Functionen $O^n(y)$ sollen nämlich, wird gefordert, von solcher Beschaffenheit sein, dass diese Gleichung $(1.a, b)$ entweder allgemein stattfindet bei völlig freier Beweglichkeit der Puncte x, y, oder wenigstens stattfindet, so lange die Bewegung jener Puncte beschränkt bleibt auf irgend welche Flächengebiete.

Unsere erste Hypothese besteht, wie schon angedeutet, darin, dass die einer solchen Anforderung entsprechenden Functionen $O^n(y)$ wirklich existiren. Von dieser Hypothese aus führt ein leicht findbarer directer Weg zur Aufstellung jener unbekannten Functionen.

Wir schlagen einen andern, indirecten Weg ein, und beginnen mit folgenden Betrachtungen. Versteht man bei irgend einer Function $f(x, y)$ oder f unter Δ und Δ' die Operationen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} + f, \\ \Delta' f &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{3}{y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1+y^2}{y^2}\, f, \end{aligned}$$

so ergiebt sich

$$\Delta\left(\frac{1}{y-x}\right)=\frac{y+x}{x(y-x)^3}+\frac{1}{y-x},$$

oder

$$x^2\,\Delta\left(\frac{1}{y-x}\right)=\frac{x(y+x)}{(y-x)^3}+\frac{x^2}{y-x},$$

oder, wenn man die Differenz $y-x=u$ setzt, und u an Stelle von x einführt,

$$x^2\,\Delta\left(\frac{1}{y-x}\right)=\frac{(y-u)\,(2y-u)}{u^3}+\frac{(y-u)^2}{u},$$

d. i.

$$x^2\,\Delta\left(\frac{1}{y-x}\right)=\frac{2y^2}{u^3}-\frac{3y}{u^2}+\frac{1+y^2}{u}-2y+u,$$

oder, wenn man nunmehr u wieder ersetzt durch seine eigentliche Bedeutung $y-x$:

$$x^2\Delta\left(\frac{1}{y-x}\right)=\frac{2y^2}{(y-x)^3}-\frac{3y}{(y-x)^2}+\frac{1+y^2}{y-x}-(y+x).$$

Diese Formel kann, wie leicht zu übersehen, auch so dargestellt werden:

$$x^2\Delta\left(\frac{1}{y-x}\right)=y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{y-x}\right)+3y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y-x}\right)+\frac{1+y^2}{y-x}-(y+x),$$

und kann daher mit Benutzung des in (2) eingeführten Operationszeichens Δ' auch so geschrieben werden:

$$x^2\,\Delta\left(\frac{1}{y-x}\right)=y^2\,\Delta'\left(\frac{1}{y-x}\right)-(y+x). \tag{3}$$

Die Gleichung (1. a, b), deren Benutzung gestattet ist auf Grund unserer ersten Hypothese, führt nun mit grosser Leichtigkeit, jedoch mit Herbeiziehung einer zweiten Hypothese, zu den Formeln:

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{1}{y-x}\right)&=\sum_0^\infty \varepsilon_n\ O^n(y)\ \Delta J^n(x),\\ \Delta'\left(\frac{1}{y-x}\right)&=\sum_0^\infty \varepsilon_n\ J^n(x)\ \Delta' O^n(y).\end{aligned} \tag{4}$$

Die hiebei erforderliche zweite Hypothese besteht in der Annahme, dass jene durch irgend welche unbekannten Functionen $O^n(y)$ erfüllbare Gleichung (1. a, b) gültig bleibt bei wiederholter Differentiation nach x, y.

Die Substitution der Werthe (4) in die Gleichung (3) liefert

$$y+x=\sum_0^\infty \varepsilon_n\Big(J^n(x)\cdot y^2\Delta' O^n(y)-O^n(y)\cdot x^2\,\Delta J^n(x)\Big). \tag{5}$$

Nun genügt die Bessel'sche Function $J^n(x)$ der (Seite 5 angegebenen) Differential-Gleichung

$$0 = \frac{\partial^2 J^n(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial J^n(x)}{\partial x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J^n(x),$$

welche mit Anwendung des in (2) eingeführten Operationszeichens Δ auch so darstellbar ist:

$$0 = \Delta J^n(x) - \frac{n^2}{x^2} J^n(x).$$

Substituirt man diesen Werth von $\Delta J^n(x)$ in (5), so erhält man

$$(6) \qquad y + x = \sum_0^\infty \varepsilon_n J^n(x) \left(y^2 \Delta' O^n(y) - n^2 O^n(y)\right).$$

Hier haben wir das Binom $y + x$ vor uns, entwickelt in eine nach den $J^n(x)$ fortschreitende Reihe, deren Coefficienten repräsentirt sind durch Functionen von y.

Eine derartige Entwicklung des Binoms $y + x$ lässt sich leicht noch in anderer Weise erhalten, nämlich durch Benutzung zweier früherer Formeln (Seite 7), welche, wenn man den dortigen Buchstaben z mit x vertauscht, so lauten:

$$1 = \varepsilon_0 J^0(x) + \varepsilon_2 J^2(x) + \varepsilon_4 J^4(x) + \cdots\cdots$$
$$x = 1\varepsilon_1 J^1(x) + 3\varepsilon_3 J^3(x) + 5\varepsilon_5 J^5(x) + \cdots\cdots$$

Wird die erste dieser Formeln mit y multiplicirt, und sodann die zweite hinzuaddirt, so ergiebt sich

$$(7) \qquad y + x = \varepsilon_0 \cdot y\, J^0(x) + \varepsilon_2 \cdot y\, J^2(x) + \varepsilon_4 \cdot y\, J^4(x) + \cdots\cdots + \varepsilon_1 \cdot 1\, J^1(x) + \varepsilon_3 \cdot 3 J^3(x) + \varepsilon_5 \cdot 5 J^5(x) + \cdots\cdots,$$

eine Entwicklung, welche, ebenso wie die in (6), fortschreitet nach den $J^n(x)$ und Coefficienten besitzt, die unabhängig von x sind.

Die dritte Hypothese dieses § besteht in der Annahme, dass diese beiden für das Binom $y + x$ erhaltenen Entwicklungen (6) und (7) unter einander identisch sind. Sie führt uns augenblicklich zu den Formeln:

$$(8) \qquad \begin{aligned} y^2 \Delta' O^n(y) - n^2 O^n(y) &= y \qquad \text{für jedes gerade } n, \\ y^2 \Delta' O^n(y) - n^2 O^n(y) &= n \qquad \text{für jedes ungerade } n, \end{aligned}$$

Formeln, welche, mit Rücksicht auf die Bedeutung von Δ', in ihrer ausführlichen Gestalt so lauten:

$$
(9)\quad
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 O^n(y)}{\partial y^2} + \frac{3}{y}\,\frac{\partial O^n(y)}{\partial y} + \left(1 - \frac{n^2-1}{y^2}\right) O^n(y) = \frac{1}{y} \quad \text{(gerades } n\text{)},\\
&\frac{\partial^2 O^n(y)}{\partial y^2} + \frac{3}{y}\,\frac{\partial O^n(y)}{\partial y} + \left(1 - \frac{n^2-1}{y^2}\right) O^n(y) = \frac{n}{y^2} \quad \text{(ungerades } n\text{)}.
\end{aligned}
$$

Eine etwas bequemere Gestalt erhalten diese Differential-Gleichungen, wenn man

$$
(10)\qquad O^n(y) = y^{n-1}\,\Omega^n(y)
$$

substituirt. Für die Functionen $\Omega^n(y)$ ergeben sich alsdann die Gleichungen:

$$
(11)\quad
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \Omega^n(y)}{\partial y^2} + \frac{2n+1}{y}\,\frac{\partial \Omega^n(y)}{\partial y} + \Omega^n(y) = \frac{1}{y^n} \quad \text{(gerades } n\text{)},\\
&\frac{\partial^2 \Omega^n(y)}{\partial y^2} + \frac{2n+1}{y}\,\frac{\partial \Omega^n(y)}{\partial y} + \Omega^n(y) = \frac{n}{y^{n+1}} \quad \text{(ungerades } n\text{)}.
\end{aligned}
$$

Für diese letzteren Gleichungen lassen sich gewisse particuläre Lösungen leicht finden mit Hülfe der Ansätze:

$$
(12)\quad
\begin{aligned}
&\Omega^n(y) = \frac{C_0}{y^n} + \frac{C_2}{y^{n+2}} + \frac{C_4}{y^{n+4}} + \cdots \quad \text{(gerades } n\text{)},\\
&\Omega^n(y) = \frac{C_1}{y^{n+1}} + \frac{C_3}{y^{n+3}} + \frac{C_5}{y^{n+5}} + \cdots \quad \text{(ungerades } n\text{)}.
\end{aligned}
$$

Die Constanten C lassen sich nämlich ohne Mühe der Art bestimmen, dass den Gleichungen (11) Genüge geschieht. Auch findet man, dass diese C nur bis zu einem gewissen Range Werthe besitzen, später aber verschwinden, dass also die vorstehenden Ansätze zu particulären Lösungen führen von geschlossener Gestalt.

Hieraus ergeben sich dann unmittelbar entsprechende particuläre Lösungen für die ursprünglichen Differential-Gleichungen (9). Sie lauten:

$$
(13)\quad
\begin{aligned}
&O^n(y) = \frac{1}{y}\left(1 + \frac{n^2}{y^2} + \frac{n^2(n^2-2^2)}{y^4} + \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{y^6} + \cdots\right)\\
&\qquad\qquad \text{(gerades } n\text{)},\\
&O^n(y) = \frac{n}{y^2}\left(1 + \frac{n^2-1^2}{y^2} + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{y^4} + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{y^6} + \cdots\right)\\
&\qquad\qquad \text{(ungerades } n\text{)}.
\end{aligned}
$$

Diese Werthe besitzen eine geschlossene Gestalt. Denn die in den Parenthesen befindlichen Reihen brechen von selber ab, wie man augenblicklich erkennt.

Die vierte und letzte Hypothese dieses § besteht endlich in der Annahme, dass die eben gefundenen particulären Lösungen der Differential-Gleichungen (9) identisch sind mit den gesuchten Functionen, d. i. mit denjenigen Functionen $O^n(y)$, durch welche die in (1) gestellte Anforderung erfüllt wird.

Dass solches in der That der Fall ist, wird später mit voller Strenge nachgewiesen werden. Um aber diesen Nachweis führen zu können ist es erforderlich, dass wir die erhaltenen Functionen $O^n(y)$ näher ins Auge fassen. Um dabei eine grössere Symmetrie mit unseren früheren Untersuchungen über die Functionen $J^n(z)$ zu erzielen, werden wir den Buchstaben y vertauschen mit z.

§ 8. Die Bessel'schen Functionen zweiter Art O^n.

Die beiden Differential-Gleichungen (9) können (wenn man den Buchstaben y mit z vertauscht) zusammengefasst werden in die eine Gleichung:

$$(14) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{3}{z}\frac{\partial F}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2-1}{z^2}\right) F = g_n,$$

wo dann g_n eine gegebene Function von z vorstellt, von verschiedener Bedeutung je nach dem Werthe von n; nämlich:

$$(14.a) \qquad \begin{aligned} g_n &= \frac{1}{z} && \text{für jedes gerade } n, \\ g_n &= \frac{n}{z^2} && \text{für jedes ungerade } n. \end{aligned}$$

So hypothetisch die Untersuchungen des vorhergehenden § auch sein mögen, mit voller Gewissheit geht aus ihnen hervor, dass dieser Differential-Gleichung (14) genügt wird durch eine Function $O^n(z)$, welche, jenachdem n gerade oder ungerade ist, dargestellt wird durch eine der beiden Formeln:

$$O^n(z) = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{n^2}{z^2} + \frac{n^2(n^2-2^2)}{z^4} + \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{z^6} + \cdots\right)$$
(gerades n),

(15.a)

$$O^n(z) = \frac{n}{z^2}\left(1 + \frac{n^2-1^2}{z^2} + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{z^4} + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{z^6} + \cdots\right)$$
(ungerades n).

Diese Formeln sollen von jetzt ab als die Definition der Function $O^n(z)$ angesehen werden. Aus ihnen ergiebt sich, um einige Beispiele anzuführen:

$$(15.a')\qquad \begin{aligned} O^0(z) &= \frac{1}{z}, \\ O^2(z) &= \frac{1}{z} + \frac{4}{z^3}, \\ O^4(z) &= \frac{1}{z} + \frac{16}{z^3} + \frac{192}{z^5}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

und andererseits:

$$(15.a'')\qquad \begin{aligned} O^1(z) &= \frac{1}{z^2}, \\ O^3(z) &= \frac{3}{z^2} + \frac{24}{z^4}, \\ O^5(z) &= \frac{5}{z^2} + \frac{120}{z^4} + \frac{1920}{z^6}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Allgemein erkennt man aus den Formeln $(15, a)$ und mit Rücksicht auf das Abbrechen dieser Formeln, dass $O^n(z)$ eine ganze rationale Function von $\frac{1}{z}$ vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade ist, welche verschwindet für $z = \infty$.

Die beiderlei Werthe, welche $O^n(z)$ besitzt, jenachdem n gerade oder ungerade, können, auf etwas künstliche, für einige Untersuchungen aber vortheilhafte Art, in gemeinsame Form gebracht werden. Setzt man nämlich:

$$\begin{aligned} A_1^n &= 1, \\ A_2^n &= n, \\ A_3^n &= n \cdot n, \\ A_4^n &= n \cdot (n-1)\,(n+1), \\ A_5^n &= n \cdot (n-2)\, n\, (n+2), \\ A_6^n &= n \cdot (n-3)\,(n-1)\,(n+1)\,(n+3), \\ A_7^n &= n \cdot (n-4)\,(n-2)\, n\,(n+2)\,(n+4), \end{aligned}$$

u. s. w., mithin allgemein:

$$A_p^n = n \cdot (n-p+3)\,(n-p+5)\,(n-p+7) \cdots\cdots (n+p-3),$$

und setzt man ausserdem:

$$\lambda_q = \frac{1-(-1)^q}{2}, \text{ folglich } \lambda_{n+p} = \frac{1-(-1)^{n+p}}{2},$$

so dass also λ_{n+p} den Werth 0 oder 1 besitzt, jenachdem $n+p$ eine gerade oder ungerade Zahl ist, so erhält man für jedes beliebige n:

$$(15.a''')\qquad O^n(z) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \lambda_{n+p}\, A_p^n\, z^{-p}.$$

Die obere Grenze dieser Summe kann nämlich $= \infty$ gesetzt werden, weil die bei der Summation entstehende Reihe von selber abbricht mit einem gewissen Gliede. Bei geradem n verschwindet der Factor λ für jedes gerade p, so dass nur ungerade Potenzen von z übrig bleiben. Und ebenso sieht man, dass nur gerade Potenzen von z übrig bleiben werden, sobald n ungerade ist.

Eine andere und weit einfachere Darstellungsart ergiebt sich für die Functionen $O^n(z)$, wenn man die als Definition hingestellten Ausdrücke (15.a) in umgekehrter Weise (nach steigenden statt nach fallenden Potenzen von z) ordnet. Man findet alsdann für jedes beliebige n den Werth:

$$(15.b) \quad \varepsilon_n O^n(z) = \frac{2^n \Pi n}{z^{n+1}}\left(1 + \frac{z^2}{2 \cdot 2n-2} + \frac{z^4}{2 \cdot 4 \cdot 2n-2 \cdot 2n-4} + \cdots\cdots\right),$$

wo unter ε_n wiederum jene schon oft gebrauchte Constante zu verstehen ist, welche den Werth 1 hat für $n = 0$, den Werth 2 für $n > 0$. Diese Formel zeigt eine überraschende Aehnlichkeit mit der für $J^n(z)$ auf Seite 5 angegebenen Formel (2.b). Sie leidet aber an der Unbequemlichkeit, dass der in Parenthese stehende Ausdruck nicht von selber abbricht, des Abbruchs aber bedarf. Das letzte jenem Ausdruck noch einzuverleibende Glied lautet, jenachdem n gerade oder ungerade ist, entweder:

$$\frac{z^n}{2 \cdot 4 \cdots n \cdot 2n-2 \cdot 2n-4 \cdots n} \qquad \text{(gerades } n\text{)},$$

oder:

$$\frac{z^{n-1}}{2 \cdot 4 \cdots n-1 \cdot 2n-2 \cdot 2n-4 \cdots n+1} \qquad \text{(ungerades } n\text{)}.$$

Bemerkt mag noch werden, dass die Formel (15.b) auch so darstellbar ist:

$$(15.c) \quad \varepsilon_n O^n(z) = \frac{\Pi n}{z \Pi n\text{-}1}\left[\frac{\Pi n\text{-}1}{\Pi 0}\left(\frac{2}{z}\right)^n + \frac{\Pi n\text{-}2}{\Pi 1}\left(\frac{2}{z}\right)^{n-2} + \frac{\Pi n\text{-}3}{\Pi 2}\left(\frac{2}{z}\right)^{n-4} + \cdots\right].$$

Der in Parenthese stehende Ausdruck bedarf hier wiederum des Abbruchs. Sein letztes Glied lautet entweder:

$$\frac{\Pi \frac{n-2}{2}}{\Pi \frac{n}{2}} \left(\frac{2}{z}\right)^0 \qquad \text{(gerades } n\text{)},$$

oder:

$$\frac{\Pi \frac{n-1}{2}}{\Pi \frac{n-1}{2}} \left(\frac{2}{z}\right)^1 \qquad \text{(ungerades } n\text{)}.$$

Die Function $O^n(z)$ ist, wie schon (Seite 14) bemerkt wurde, zu charakterisiren als eine ganze rationale Function von $\frac{1}{z}$ vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade, welche verschwindet für $z=\infty$. Hiermit steht, wie man augenblicklich übersieht, in unmittelbarer Beziehung der Abbruch der Ausdrücke (15. *b*, *c*). Diese Ausdrücke sind nämlich, dies können wir als allgemeine und stets gültige Regel hinstellen, jederzeit so weit fortzusetzen, als es verträglich ist mit dem eben genannten Charakter der Function $O^n(z)$.

Endlich kann die Function $O^n(z)$ auch dargestellt werden durch ein bestimmtes Integral. Von den Ausdrücken (15. *a*) ausgehend findet man ohne erhebliche Anstrengung*):

$$(15.d) \qquad O^n(z) = \int_0^\infty \frac{(\omega+\sqrt{\omega^2+z^2}\,)^n+(\omega-\sqrt{\omega^2+z^2}\,)^n}{2z^{n+1}} e^{-\omega}\, d\omega.$$

Schon die äussere Gestalt der Functionen J und O verräth, wenn man einen Blick auf die Formeln (2. *b*) Seite 5 und (15. *b*) Seite 15 wirft, eine gewisse Zusammengehörigkeit dieser Functionen, ähnlich derjenigen, welche zwischen den Kugelfunctionen P und Q stattfindet. Dass eine solche Zusammengehörigkeit wirklich vorhanden ist, wird die weitere Untersuchung deutlich hervortreten lassen. Mit Rücksicht hierauf mag es mir gestattet sein, den Namen der Functionen J auszudehnen auf die O, nämlich die J als Bessel'sche Functionen erster Art, die O als Bessel'sche Functionen zweiter Art zu bezeichnen.

Ein Mangel in der erwähnten Analogie besteht allerdings darin, dass P und Q particuläre Lösungen ein und derselben Differential Gleichung sind, während die Functionen J und O verschiedenen Differential-Gleichungen zugehören, nämlich den Gleichungen (1.) Seite 5 und (14.) Seite 13.

§ 9. Integral-Eigenschaften der Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art.

Die Function $J^n(z)$ wird durch eine Reihe (Seite 5) dargestellt, welche nach positiven ganzen Potenzen von z fortläuft,

*) Die Ableitung dieser Formel unterdrücke ich, weil von ihr im Folgenden kein Gebrauch gemacht werden wird.

und welche (ebenso etwa wie die Reihen für $\sin z$ und $\cos z$) convergent ist für alle Puncte der zEbene. Daraus folgt:

(1) *Die Function $J^n(z)$ ist auf der zEbene allenthalben eindeutig und stetig. Gleiches gilt von ihren sämmtlichen Ableitungen.*

Andererseits ergiebt sich aus der für $O^n(z)$ hingestellten Definition (Seite 13.):

(2) *Die Function $O^n(z)$ ist von der Form:*

$$O^n(z) = \frac{A}{z^{n+1}} + \frac{B}{z^n} + \frac{C}{z^{n-1}} + \cdots\cdots + \frac{G}{z^2} + \frac{H}{z},$$

wo $A, B, C, \cdots G, H$ Constante, und zum Theil $= 0$ sind. Sie ist daher eindeutig und stetig in allen Puncten der zEbene, ausser im Puncte 0. Gleiches gilt von ihren Ableitungen.

Aus (1) ergiebt sich unmittelbar:

(3) $$\int J^m(z)\, J^n(z)\, dz = 0,$$

wo die Integration auf der zEbene hinerstreckt sein kann über eine beliebige in sich zurücklaufende Curve, und wo m, n irgend zwei beliebige (gleiche oder verschiedene) Zahlen vorstellen.

Ebenso ergiebt sich aus (2), dass die analoge Formel

(4) $$\int O^m(z)\, O^n(z)\, dz = 0,$$

gültig sein wird, sobald die in sich zurücklaufende Integrations-Curve ein Gebiet umgrenzt, welches den Unstetigkeitspunct 0 der Functionen O nicht in sich enthält. Beachtet man aber, dass das Integral

$$\int \frac{dz}{z^p\, z^q},$$

hinerstreckt über einen um jenen Punct 0 beschriebenen Kreis, verschwindet, sobald p, q positive ganze und von 0 verschiedene Zahlen sind, so ergiebt sich mit Rucksicht auf die in (2) angegebene allgemeine Form der Functionen O augenblicklich, dass die Gleichung (4) an die eben gemachte Beschränkung nicht gebunden ist, dass sie vielmehr, ebenso wie (3), gültig sein wird für jede beliebige in sich zurücklaufende Integrations-Curve*).

*) Streng genommen, muss vorausgesetzt werden, dass die Integrations-Curve den Punct 0 nicht berührt, weil sonst der Ausdruck unter dem Integral unendlich gross werden würde in dem Augenblick, wo die Integration diesen Punct passirt. Dieselbe Voraussetzung wird auch noch späterhin in diesem § gemacht werden. Sie liegt so deutlich zu Tage, dass ihre jedesmalige Erwähnung überflüssig erscheint.

Um endlich drittens die Integrale von der Gattung

$$\int J^m(z)\, O^n(z)\, dz \tag{5}$$

zu untersuchen, gehen wir zurück auf die Differential-Gleichungen. Setzen wir zur Abkürzung $J^m(z) = J$ und $O^n(z) = O$, so lauten jene Gleichungen (Seite 5 und 13) folgendermassen:

$$\tag{6} \begin{aligned} &\frac{\partial^2 J}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\,\frac{\partial J}{\partial z} + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) J = 0, \\ &\frac{\partial^2 O}{\partial z^2} + \frac{3}{z}\,\frac{\partial O}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2-1}{z^2}\right) O = g_n, \end{aligned}$$

und können, wie leicht zu übersehen, auch so dargestellt werden:

$$\tag{7} \begin{aligned} &\frac{\partial^2 J}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\,\frac{\partial J}{\partial z} + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) J = 0, \\ &\frac{\partial^2 zO}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\,\frac{\partial zO}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) zO = zg_n. \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man die erste Gleichung mit $-zO$, die zweite mit J multiplicirt, und dann beide addirt:

$$\left(J\,\frac{\partial^2 zO}{\partial z^2} - zO\,\frac{\partial^2 J}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{z}\left(J\,\frac{\partial zO}{\partial z} - zO\,\frac{\partial J}{\partial z}\right) + \\ + \frac{m^2-n^2}{z^2}\, zJO = zg_n J,$$

oder, wenn man zur Abkürzung $J\,\frac{\partial zO}{\partial z} - zO\,\frac{\partial J}{\partial z} = U$ setzt:

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{U}{z} + (m^2 - n^2)\,\frac{JO}{z} = zg_n J,$$

oder wenn man mit z multiplicirt:

$$z\,\frac{\partial U}{\partial z} + U + (m^2 - n^2)\, JO = z^2 g_n J,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{\partial zU}{\partial z} + (m^2 - n^2)\, JO = z^2 g_n J. \tag{8}$$

Integrirt man diese Gleichung über eine beliebige in sich zurücklaufende Curve, so ergiebt sich:

$$(m^2 - n^2) \int JOdz = \int z^2 g_n Jdz. \tag{9}$$

Das Product $z^2 g_n$ ist (zufolge des Werthes von g_n Seite 13) entweder $= z$, oder $= n$. Demnach ist $z^2 g_n J$, ebenso wie J selber, auf der zEbene überall eindeutig und stetig, das über jene Curve hinerstreckte Integral $\int z^2 g_n Jdz$ also $= 0$. Somit verwandelt sich die Gleichung (9) in:

(10) $$(m^2 - n^2) \int JOdz = 0,$$

oder ausführlicher geschrieben, in:

(10. a) $$(m^2 - n^2) \int J^m(z)\, O^n(z)\, dz = 0.$$

Hieraus folgt, dass

(11) $$\int J^m(z)\, O^n(z)\, dz = 0$$

sein muss, so oft die Zahlen m, n verschieden sind.

Zu untersuchen bleibt schliesslich noch der Werth des Integrales (11) für den Fall $m = n$. Nach den Definitionen von $J^n(z)$ und $O^n(z)$, Seite 5 und 15, ist

$$J^n(z) = \frac{z^n}{2^n \Pi n}\left(1 + az^2 + bz^4 + \cdots\right),$$

$$\varepsilon_n O^n(z) = \frac{2^n \Pi n}{z^{n+1}}\left(1 + \alpha z^2 + \beta z^4 + \cdots\right),$$

wo $a, b, \ldots \alpha, \beta, \ldots$ Constante sind, auf deren Werthe es hier nicht weiter ankommt. Hieraus folgt durch Multiplication:

$$\varepsilon_n J^n(z)\, O^n(z) = \frac{1}{z}\left(1 + Az^2 + Bz^4 + \cdots\right),$$

wo $A, B, \ldots$ ebenfalls Constante sind. Integrirt man diese Gleichung über irgend eine in sich zurücklaufende Curve, so erhält man

$$\varepsilon_n \int J^n(z)\, O^n(z)\, dz = \int \frac{dz}{z}.$$

Hieraus aber folgt, dass das Integral

(12) $$\varepsilon_n \int J^n(z)\, O^n(z)\, dz = 2\pi i, \quad \text{oder} = 0$$

sein muss, jenachdem das von der Curve umgrenzte Gebiet den Punct 0 enthält, oder nicht enthält. Vorausgesetzt wird dabei, dass die Integration um dieses Gebiet herumläuft in positiver Richtung.

Die einzelnen Ergebnisse in (3), (4) und (11), (12) können folgendermassen zusammengefasst werden.

Versteht man unter $\int$ eine auf der z Ebene in geschlossener Bahn und in positiver Richtung herumlaufende Integration, so gelten die Formeln:

(13) $$\begin{aligned} \int J^m(z)\; J^n(z)\, dz &= 0, \\ \int O^m(z)\; O^n(z)\, dz &= 0, \\ \int J^m(z)\; O^n(z)\, dz &= k, \end{aligned}$$

wo m, n beliebige (gleiche oder verschiedene) Zahlen sind.

Wenn das von der Integrations-Curve umgrenzte Gebiet den Punct 0 *nicht enthält, so ist jederzeit*

$$k = 0.$$

Enthält aber jenes Gebiet den Punct 0 *in sich, so ist*

$$k = \frac{2\pi i}{\varepsilon n}, \qquad oder = 0,$$

jenachdem die Zahlen m, n gleich oder verschieden sind.

Um jede Ungenauigkeit zu entfernen, ist schliesslich noch zu bemerken, dass einige der hier aufgeführten Formeln ungültig werden, sobald die Integrationscurve den Punct 0 berührt; wie sich solches sowohl aus der Beschaffenheit dieser Formeln, als auch aus ihrer Herleitung leicht erkennen lässt. Andere Ausnahmefälle existiren nicht.

§ 10. Recurrirende Eigenschaften der Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art.

Die Definitionen der Functionen J und O führen, wie sogleich erläutert werden soll, zu folgendem merkwürdigen Satz.

Für jedes beliebige n (ausgenommen n = 0) ist:

$$(14.a) \qquad \begin{aligned} 2\frac{\partial J^n(z)}{\partial z} &= J^{n-1}(z) - J^{n+1}(z), \\ 2\frac{\partial O^n(z)}{\partial z} &= O^{n-1}(z) - O^{n+1}(z). \end{aligned}$$

Auf den Fall n = 0 sind diese Formeln schon desshalb nicht anwendbar, weil $J^{-1}(z)$ *und* $O^{-1}(z)$ *ohne Definition geblieben sind. Diese Lücke findet ihre Ausfüllung in den Formeln*

$$(14.b) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial J^0(z)}{\partial z} &= -J^1(z), \\ \frac{\partial O^0(z)}{\partial z} &= -O^1(z). \end{aligned}$$

In Bezug auf diese Relationen herrscht also zwischen den beiderlei Functionen J und O die vollständigste Uebereinstimmung.

Die Relationen für die J lassen sich auf Grund der festgesetzten Definition:

$$(15) \quad J^n(z) = \frac{z^n}{2\cdot4\cdots2n}\left(1 - \frac{z^2}{2\cdot2n+2} + \frac{z^4}{2\cdot4\cdot2n+2\cdot2n+4} - \cdots\cdots\right)$$

mit solcher Leichtigkeit beweisen, dass ein näheres Eingehen hierauf überflüssig erscheint.

Mehr Mühe macht der Beweis bei den O. Was zunächst den Fall $n = 0$ anbelangt, so ergiebt sich die Relation (14. b) augenblicklich aus den (Seite 14) gefundenen Werthen:

$$O^0(z) = \frac{1}{z}, \qquad O^1(z) = \frac{1}{z^2}.$$

Um die den übrigen Fällen $n > 0$ entsprechende Relation (14. a) zu beweisen, gehen wir aus von der Formel

(16) $$O^n(z) = \Sigma \lambda_{n+p} A_p^n z^{-p},$$

(welche Seite 14 besprochen ist). Aus dieser folgt:

(17)
$$O^{n-1}(z) = \Sigma \lambda_{n+p-1} A_p^{n-1} z^{-p},$$
$$O^{n+1}(z) = \Sigma \lambda_{n+p+1} A_p^{n+1} z^{-p},$$
$$\frac{\partial O^n(z)}{\partial z} = -\Sigma p \lambda_{n+p} A_p^n z^{-p-1}.$$

Die Summationen Σ sind hier erstreckt über $p = 1, 2, 3, \cdots\cdots \infty$. In den drei Ausdrücken (17) sind die Coefficienten von z^{-p} folgende:

(17. a)
$$\lambda_{n+p-1} \; A_p^{n-1},$$
$$\lambda_{n+p+1} \; A_p^{n+1},$$
$$-(p-1)\, \lambda_{n+p-1} \; A^n_{p-1}.$$

Diese Coefficienten nun müssen, falls jene Ausdrücke (17) der Relation

$$2 \frac{\partial O^n(z)}{\partial z} = O^{n-1}(z) - O^{n+1}(z)$$

genügen sollen, von solcher Beschaffenheit sein, dass

(16) $$-2(p-1)\,\lambda_{n+p-1} A^n{}_{p-1} = \lambda_{n+p-1} A_p^{n-1} - \lambda_{n+p+1} A_p^{n+1}$$

ist. Die Indices der drei λ (nämlich $n + p - 1$ und $n + p + 1$) sind entweder beide gerade oder beide ungerade, die Grössen λ selber also von gleichem Werth; so dass die zu erfüllende Gleichung sich reducirt auf:

(17) $$-2\,(p-1)\; A^n{}_{p-1} = A_p^{n-1} - A_p^{n+1}.$$

Dass diese nun aber wirklich erfüllt wird, zeigt sich augenblicklich, wenn man für die A ihre Werthe (Seite 14) substituirt.

Von Bessel selber wurde bereits eine Relation entdeckt, wichtig für eine recurrirende Berechnung der Functionen J. Er fand nämlich:

Für jedes beliebige n (ausgenommen n = 0) ist

$$\frac{2n}{z} J^n(z) = J^{n-1}(z) + J^{n+1}(z), \tag{18}$$

eine Relation, welche auf den Fall n = 0 schon desshalb nicht anwendbar ist, weil $J^{-1}(z)$ ohne Definition geblieben ist.

Von der Richtigkeit dieses Satzes kann man sich, mit Zugrundelegung der Formel (15), durch eine einfache Rechnung leicht überzeugen.

Subtrahirt man von der Relation (18) die in (14. *a*) aufgestellte Relation:

$$2 \frac{\partial J^n(z)}{\partial z} = J^{n-1}(z) - J^{n+1}(z),$$

so ergiebt sich:

$$\frac{n}{z} J^n(z) - \frac{\partial J^n(z)}{\partial z} = J^{n+1}(z). \tag{19}$$

Diese letztere Relation hat vor den früheren den Vorzug, dass sie nicht allein für $n > 0$ gilt, sondern auch noch gültig ist für $n = 0$. Denn für $n = 0$ verwandelt sie sich in

$$- \frac{\partial J^0(z)}{\partial z} = J^1(z), \tag{19.a}$$

eine Formel, welche identisch ist mit (14. *b*). Somit können wir folgenden Satz hinstellen.

Für jedes beliebige n (inclusive n = 0) ist;

$$J^{n+1}(z) = \frac{n}{z} J^n(z) - \frac{\partial J^n(z)}{\partial z}, \tag{20}$$

eine Relation, welche je zwei aufeinanderfolgende der Functionen J miteinander verbindet.

Bei den Functionen O Eigenschaften zu entdecken, welche denen in (18) und (20) analog wären, ist mir nicht gelungen. Die in diesem § angegebenen Relationen sind für die Bessel'schen Functionen erster Art, nämlich für die J, schon von Bessel selber abgeleitet worden*), und zwar mit Hülfe einer Methode von bemerkenswerther Einfachheit, welche hier kurz angegeben werden mag. Die Formel (Seite 6):

$$J^n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\omega - z \sin \omega)\, d\omega$$

---

*) l. c. Seite 31 und 34.

verwandelt sich, wenn man zur Abkürzung

(21) $$U = n\omega - z \sin \omega$$

setzt, in:

(22) $$J^n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos U \, d\omega.$$

Gleichzeitig wird alsdann:

(23) $$J^{n-1}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos (U - \omega) \, d\omega,$$

(24) $$J^{n+1}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos (U + \omega) \, d\omega.$$

Nun ist, wenn man z als constant, und nur ω als variabel ansieht (nach 21):

$$d \sin U = \cos U \, dU = \cos U \, (n d\omega - z \cos \omega \, d\omega),$$

und wenn man nun nach ω integrirt zwischen 0 und π:

$$\Big[\sin U\Big]_{\omega=0}^{\omega=\pi} = n \int_0^\pi \cos U d\omega - z \int_0^\pi \cos U \cos \omega \, d\omega.$$

Diese Gleichung verwandelt sich mit Rücksicht auf (21) und (22) in:

$$0 = n\pi \, J^n(z) - z \int_0^\pi \cos U \cos \omega \, d\omega,$$

und liefert daher:

(25) $$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos U \cos \omega \, d\omega = \frac{n}{z} J^n(z).$$

Nun ist allgemein:

$$2 \cos U \cos \omega = \cos (U - \omega) + \cos (U + \omega),$$

mithin:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos U \cos \omega \, d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Big(\cos (U - \omega) + \cos (U + \omega)\Big) d\omega.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (23), (24), (25):

(26) $$\frac{2n}{z} J^n(z) = J^{n-1}(z) + J^{n+1}(z).$$

Ferner ergiebt sich durch Differentiation der Formel (22) nach z:

$$\frac{\partial J^n(z)}{\partial z} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin U \sin\omega\, d\omega,$$

oder, was dasselbe ist:

$$2\,\frac{\partial J^n(z)}{\partial z} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big(\cos(U-\omega) - \cos(U+\omega)\Big)\, d\omega,$$

also mit Rücksicht auf (23), (24):

$$(27)\qquad 2\,\frac{\partial J^n(z)}{\partial z} = J^{n-1}(z) - J^{n+1}(z).$$

Die Formeln (26) und (27) sind aber identisch mit den in (14) und (18) aufgestellten Relationen.

Ein noch anderer Weg zur Herleitung dieser Relationen ist von Anger*) eingeschlagen. Anger geht aus von den (Seite 7 angegebenen) Entwicklungen der Ausdrücke cos (z sin ω) und sin (z sin ω).

Zweiter Abschnitt.

Entwicklung nach Bessel'schen Functionen.

§ 11. Convergenz gewisser Reihen, deren Glieder durch Bessel'sche Functionen ausgedrückt sind.

Wir bezeichnen mit R^{00} und R^{pq} folgende Reihen

$$(1)\qquad R^{00} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n\, J^n(x)\, O^n(y),$$

$$(2)\qquad R^{pq} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \frac{\partial^p J^n(x)}{\partial x^p}\, \frac{\partial^q O^n(y)}{\partial y^q},$$

und werden untersuchen, wie die Argumente x, y beschaffen sein müssen, damit diese Reihen convergent sind.

---

*) Anger: „Untersuchungen über die Functionen J_k^h, mit Anwendungen auf das Kepler'sche Problem." Danzig. 1855. Seite 2—5.

Wir beginnen mit der Ableitung eines Hülfssatzes. Ist eine Function $f(z)$ auf der zEbene eindeutig und stetig innerhalb eines beliebig gegebenen Kreises, und ist c irgend ein Punct innerhalb dieses Kreises, so wird nach der Cauchy'schen Formel (Seite 1)

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)\,dz}{z-c} \tag{3}$$

sein, wo die Integration positiv hinerstreckt zu denken ist um den Kreis. Hieraus folgt durch $p$malige Differentiation nach c:

$$\frac{\partial^p f(c)}{\partial c^p} = \frac{\Pi p}{2\pi i} \int \frac{f(z)\,dz}{(z-c)^{p+1}}. \tag{4}$$

Zum Puncte c wollen wir gegenwärtig den Mittelpunct des gegebenen Kreises nehmen. Setzen wir gleichzeitig, was die Randpuncte z anbelangt:

$$z - c = \varrho e^{i\vartheta},$$

mithin

$$dz = \varrho e^{i\vartheta} i\, d\vartheta,$$

wo ϱ den Radius des Kreises repräsentirt, so verwandeln sich die Formeln (3), (4) in folgende:

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int f(z)\, d\vartheta. \tag{5}$$

$$\frac{\partial^p f(c)}{\partial c^p} = \frac{\Pi p}{\varrho^p} \frac{1}{2\pi} \int f(z)\, e^{-pi\vartheta}\, d\vartheta. \tag{6}$$

Mit Hülfe des bekannten Satzes, dass der Modul einer Summe kleiner ist, als die Summe der Moduln:

$$mod\,(u + v + w + \cdots) < mod\, u + mod\, v + mod\, w + \cdots,$$

ergiebt sich nun aus der Formel (6):

$$mod\, \frac{\partial^p f(c)}{\partial c^p} < \frac{\Pi p}{\varrho^p} \frac{1}{2\pi} \int mod\, \left(f(z)\, e^{-pi\vartheta}\, d\vartheta\right),$$

oder weil $mod\, e^{-pi\vartheta} = 1$, und $mod\, d\vartheta = d\vartheta$ ist:

$$mod\, \frac{\partial^p f(c)}{\partial c^p} < \frac{\Pi p}{\varrho^p} \frac{1}{2\pi} \int mod\, f(z) \cdot d\vartheta. \tag{7}$$

Repräsentirt die Constante M den grössten Werth, welchen $mod\, f(z)$ innerhalb des gegebenen Kreises besitzt, so wird die rechte Seite der vorstehenden Formel, wenn man $mod\, f(z)$ durch jene Constante M ersetzt, noch weiter vergrössert werden. Um so mehr also wird

(8) $$mod\ \frac{\partial^p f(c)}{\partial c^p} < \frac{\Pi p}{\varrho^p}\ \frac{1}{2\pi}\int M d\vartheta, \qquad \text{d. i.} < \frac{\Pi p}{\varrho^p}\ M$$

sein. Also:

Ist $f(z)$ innerhalb eines um den Punct c mit dem Radius ϱ beschriebenen Kreises eindeutig und stetig, und ist M das Maximum ihres Moduls innerhalb des Kreises, so ist jederzeit

(9) $$mod\ \frac{\partial^p f(c)}{\partial c^p} < \frac{\Pi p}{\varrho^p}\ M.$$

Dieser Satz wurde schon von Cauchy aufgestellt).*

Wenn ich die Begründung eines schon bekannten Satzes hier von Neuem dargelegt habe, so ist es nur geschehen, um die unbedingte Zuverlässigkeit desjenigen Fundamentes vor Augen zu führen, auf welches die nachfolgende Untersuchung basirt sein wird.

Sind x, y zwei beliebig gegebene complexe Grössen, also irgend zwei gegebene Puncte auf der zEbene, so sind (Seite 5 und 15) die Bessel'schen Functionen $J^n(x)$, $O^n(y)$ dargestellt durch die Formeln:

(10) $$\begin{aligned} J^n(x) &= \frac{x^n}{N}\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 2n+2} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 2n+2\cdot 2n+4} - \cdots\cdots \text{inf.}\right), \\ \varepsilon^n O^n(y) &= \frac{N}{y^{n+1}}\left(1 + \frac{y^2}{2\cdot 2n-2} + \frac{y^4}{2\cdot 4\cdot 2n-2\cdot 2n-4} + \cdots\cdots \text{fin.}\right). \end{aligned}$$

Hier steht N zur Abkürzung für die Zahl $2^n \Pi n$. Die rechte Seite der ersten Formel repräsentirt eine ins Unendliche fortschreitende Reihe, die der zweiten Formel hingegen einen Ausdruck, der bei einem gewissen Gliede abzubrechen ist. Solches soll angedeutet werden durch die zugesetzten inf. und fin.

Mit Rücksicht auf den Satz, dass der Modul der Summe kleiner ist als die Summe der Moduln, ergiebt sich nun aus (10):

(11) $$\begin{aligned} mod\ J^n(x) &< \frac{\alpha^n}{N}\left(1 + \frac{\alpha^2}{2\cdot 2n+2} + \frac{\alpha^4}{2\cdot 4\cdot 2n+2\cdot 2n+4} + \cdots\cdots \text{inf.}\right), \\ mod\ \varepsilon_n O^n(y) &< \frac{N}{\beta^{n+1}}\left(1 + \frac{\beta^2}{2\cdot 2n-2} + \frac{\beta^4}{2\cdot 4\cdot 2n-2\cdot 2n-4} + \cdots\cdots \text{fin.}\right), \end{aligned}$$

*) Briot et Bouquet: Th. des fonctions doubl. périodiques. Paris 1859. Seite 44.

wo α den Modul von x, und β den von y repräsentirt. Die rechten Seiten dieser Formeln werden, wenn man die in den einzelnen Gliedern vorhandenen Nenner verkleinert, noch weiter vergrössert. Um so mehr ist also:

$$(12)\qquad \begin{aligned} mod\ J^n(x) &< \frac{\alpha^n}{N}\left(1 + \frac{\alpha^2}{1} + \frac{\alpha^4}{1\cdot 2} + \frac{\alpha^6}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\cdots \text{ inf.}\right), \\ mod\ \varepsilon_n O^n(y) &< \frac{N}{\beta^{n+1}}\left(1 + \frac{\beta^2}{1} + \frac{\beta^4}{1\cdot 2} + \frac{\beta^6}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\cdots \text{ fin.}\right). \end{aligned}$$

In der zweiten Formel endlich wird der Ausdruck rechts gegenwärtig noch weiter vergrössert werden, wenn man seine Glieder nicht abbrechen, sondern (ebenso wie die in der ersten Formel) ins Unendliche fortlaufen lässt. Hierdurch ergiebt sich:

$$(13)\qquad \begin{aligned} mod\ J^n(x) &< \frac{\alpha^n}{N}\, e^{\alpha\alpha}, \\ mod\ \varepsilon_n O^n(y) &< \frac{N}{\beta^{n+1}}\, e^{\beta\beta}. \end{aligned}$$

Wir beschreiben auf der zEbene um jeden der beiden gegebenen Puncte x, y einen Kreis vom Radius ϱ. Innerhalb des einen Kreises sind alsdann das Maximum und Minimum von $mod\ z$ repräsentirt durch $\alpha + \varrho$ und $\alpha - \varrho$. Desgleichen sind das Maximum und Minimum von $mod\ z$ innerhalb des andern Kreises repräsentirt durch $\beta + \varrho$ und $\beta - \varrho$. Zufolge der Formeln (13) wird daher das Maximum von $mod\ J^n(z)$ innerhalb des um x beschriebenen Kreises kleiner sein als

$$\frac{(\alpha+\varrho)^n}{N}\, e^{(\alpha+\varrho)(\alpha+\varrho)};$$

und andererseits das Maximum von $mod\ \varepsilon_n\ O^n(z)$ innerhalb des um y beschriebenen Kreises kleiner sein als

$$\frac{N}{(\beta-\varrho)^{n+1}}\, e^{(\beta+\varrho)(\beta+\varrho)}.$$

Hieraus aber folgt durch Benutzung des vorangestellten Hülfssatzes (9) augenblicklich:

$$(14)\qquad \begin{aligned} mod\ \frac{\partial^p J^n(x)}{\partial x^p} &< \frac{\Pi p}{\varrho^p}\ \frac{(\alpha+\varrho)^n}{N}\, e^{(\alpha+\varrho)(\alpha+\varrho)}, \\ mod\ \varepsilon_n \frac{\partial^q O^n(y)}{\partial y^q} &< \frac{\Pi q}{\varrho^q}\ \frac{N}{(\beta-\varrho)^{n+1}}\, e^{(\beta+\varrho)(\beta+\varrho)}. \end{aligned}$$

Anwendbar ist indessen jener Hülfssatz nur auf Functionen, welche innerhalb des gerade betrachteten Kreises eindeutig und stetig sind. Für die Gültigkeit der ersten Formel (14) resultirt hieraus keinerlei Beschränkung; denn die Function $J^n(z)$ ist auf der zEbene allenthalben eindeutig und stetig (Seite 17). Die Function $O^n(z)$ hingegen ist auf der zEbene unstetig im Puncte 0; die zweite Formel (14) wird demnach nur dann gültig sein, wenn der um y beschriebene Kreis jenen Unstetigkeitspunct 0 nicht in sich enthält.

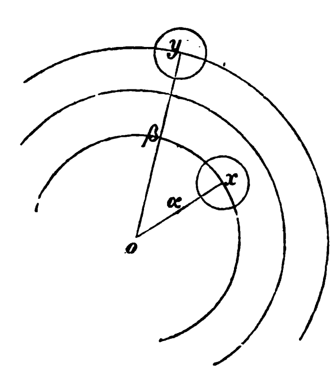
Bisher waren die Puncte x, y auf der zEbene beliebig gegeben gedacht. Fortan wollen wir annehmen, der Punct x liege dem Anfangspunct 0 näher als der Punct y, also annehmen, dass $mod\, x < mod\, y$, oder (was dasselbe ist) dass

$$(15) \qquad \alpha < \beta$$

sei. Gleichzeitig mag der Radius ϱ der um x und y beschriebenen Kreise so gewählt gedacht werden, dass

$$(16) \qquad \alpha + \varrho < \beta - \varrho$$

ist, was dadurch zu erreichen ist, dass man ϱ kleiner als $\frac{\beta - \alpha}{2}$ macht.



Denken wir uns also durch die Puncte x und z zwei concentrische Kreise gelegt, deren Mittelpunct in 0 liegt, so wird (nach 15) x auf dem kleineren, y auf dem grösseren Kreise liegen. Denken wir uns ferner einen dritten concentrischen Kreis, welcher zwischen jenen beiden liegt, und von jenen gleich weitentfernt ist, so wird dieser dritte Kreis (zufolge 16) von den beiden kleineren Kreisen, welche um x und y mit dem Radius ϱ beschrieben sind, weder geschnitten noch berührt werden. Der kleine Kreis um y kann unter diesen Umständen den Punct 0 nicht in sich enthalten, so dass also der Anwendung der Formeln (14) auf den vorliegenden Fall keinerlei Hinderniss entgegensteht.

Multiplicirt man die beiden Formeln (13) mit einander, und summirt man das so erhaltene Product über die Zahlen

$n=0, 1, 2, 3, \ldots . \infty$, so erhält man:

$$(17) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} mod \left(\varepsilon_n J^n(x) O^n(y)\right) < e^{\alpha\alpha+\beta\beta} . \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha^n}{\beta^{n+1}}.$$

Zufolge (15) ist die Reihe rechts convergent, die Reihe links also ebenfalls. Hieraus aber folgt sofort, dass die in (1) zur Untersuchung vorgelegte, mit R^{00} bezeichnete Reihe ebenfalls convergent ist. Denn es ist ein bekannter Satz, dass eine gegebene Reihe jederzeit convergiren muss, wenn feststeht, dass die ihr entsprechende Modulreihe convergirt.

Multiplicirt man ferner die beiden Formeln (14) miteinander, und summirt sodann wieder über $n=0, 1, 2, 3, \cdots \infty$, so ergiebt sich:

$$(18) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} mod \left(\varepsilon_n \frac{\partial^p J^n(x)}{\partial x^p} \frac{\partial^q O^n(y)}{\partial y^q}\right)$$

$$< \frac{\Pi_p \Pi_q}{\varrho^{p+q}} e^{(\alpha+\varrho)(\alpha+\varrho)+(\beta+\varrho)(\beta+\varrho)} . \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha+\varrho)^n}{(\beta-\varrho)^{n+1}}.$$

Zufolge (16) ist die Reihe rechts convergent, die Reihe links also ebenfalls. Somit ergiebt sich, dass die in (2) mit R^{pq} bezeichnete Reihe ebenfalls convergent sein muss.

So lange also $\alpha < \beta$, d. i. $mod\ x < mod\ y$ ist, sind die Reihen R^{00} und R^{pq} jederzeit convergent, ihre Werthe also stetige Functionen von x, y. Als solche mögen sie bezeichnet werden mit $R^{00}(x, y)$ und $R^{pq}(x, y)$.

Wir betrachten die beiden Functionen:

$$(19) \qquad R^{00}(x, y) = \Sigma\, \varepsilon_n J^n(x)\, O^n(y),$$

$$(20) \qquad R^{10}(x, y) = \Sigma\, \varepsilon_n \frac{\partial J^n(x)}{\partial x} O^n(y),$$

immer unter der Voraussetzung, dass $mod\ x < mod\ y$ ist. Da $R^{00}(x, y)$ eine stetige Function von x, y ist, so gilt Gleiches auch von ihren Ableitungen, z. B. von

$$(21) \qquad \frac{\partial R^{00}(x, y)}{\partial x}$$

Sind also x und y gegeben (der Bedingung $mod\ x < mod\ y$ entsprechend), so werden die Ausdrücke (19), (20), (21) bestimmte endliche Werthe besitzen.

Aus (19) folgt unmittelbar:

$$(22) \quad \frac{R^{00}(x+h, y) - R^{00}(x, y)}{h} = \Sigma\, \varepsilon_n \frac{J^n(x+h) - J^n(x)}{h} O(y),$$

wie klein die Grösse h auch gewählt werden mag. Durch Verkleinerung von h können wir aber den Ausdruck links beliebig nahe an die feste Grenze (21), und den Ausdruck rechts beliebig nahe an die feste Grenze (20) heranbringen. Daraus folgt, dass diese beiden Grenzen untereinander identisch sind, dass also

$$\frac{\partial R^{00}(x, y)}{\partial x} = R^{10}(x, y) \tag{23}$$

ist. Ebenso wird sich nachweisen lassen, dass

$$\frac{\partial R^{00}(x, y)}{\partial y} = R^{01}(x, y) \tag{24}$$

sein muss. Und durch weitere Fortsetzung des angegebenen Verfahrens wird man, wie leicht zu übersehen, finden, dass allgemein

$$\frac{\partial^{p+q} R^{00}(x, y)}{\partial x^p \partial y^q} = R^{pq}(x, y) \tag{25}$$

ist. Die erhaltenen Resultate lassen sich folgendermassen zusammenfassen.

Sind x, y zwei complexe, der Beschränkung $mod\ x < mod\ y$ unterworfene Variable, und p, q beliebige Zahlen, so sind die Reihen

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n J^n(x)\, O^n(y), \\ &\sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \frac{\partial^p J^n(x)}{\partial x^p} \frac{\partial^q O^n(y)}{\partial y^q} \end{aligned} \tag{26}$$

jederzeit convergent, ihre Werthe also stetige Functionen von x, y. Von diesen beiden stetigen Functionen kann die letztere dadurch erhalten werden, dass man die erstere $p$mal nach x und $q$mal nach y differenzirt.

§ 12. Fortsetzung. Summation der betrachteten Reihen.

Halten wir nach wie vor an der Beschränkung fest: $mod\ x < mod\ y$, und setzen wir:

$$f = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n J^n(x)\, O^n(y), \tag{27 a.}$$

oder kürzer ausgedrückt:

$$f = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n J^n O^n, \tag{27 b.}$$

so wird f eine **stetige** Function von x, y sein. Gleichzeitig werden alsdann, ebenfalls auf Grund des vorhergehenden Satzes, die Gleichungen stattfinden:

$$(28)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n\, O^n\, \frac{\partial J^n}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n\, J^n\, \frac{\partial O^n}{\partial y}. \end{aligned}$$

Nach den recurrirenden Eigenschaften der Bessel'schen Functionen (Seite 20) und mit Rücksicht auf die eigenthümlichen Werthe der Constanten ε:

$$\varepsilon_0 = 1, \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \cdots\cdots = 2,$$

ist aber

$$(29)\qquad \begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{\partial J^0}{\partial x} &= - J^1, \\ \varepsilon_0 \frac{\partial O^0}{\partial y} &= - O^1, \end{aligned}$$

und ferner für jedes von 0 verschiedene n:

$$(30)\qquad \begin{aligned} \varepsilon_n \frac{\partial J^n}{\partial x} &= J^{n-1} - J^{n+1}, \\ \varepsilon_n \frac{\partial O^n}{\partial y} &= O^{n-1} - O^{n+1}. \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe (29), (30) in die Formeln (28), so erhält man für $\frac{\partial f}{\partial x}$ die Reihe:

$$- O^0 J^1 + O^1(J^0 - J^2) + O^2(J^1 - J^3) + O^3(J^2 - J^4) + \cdots\cdots\cdots,$$

und andererseits für $\frac{\partial f}{\partial y}$ die Reihe:

$$- J^0 O^1 + J^1(O^0 - O^2) + J^2(O^1 - O^3) + J^3(O^2 - O^4) + \cdots\cdots\cdots$$

Diese beiden Reihen bestehen, wie man sofort bemerken wird, aus genau **denselben** Gliedern, nur mit dem Unterschiede, dass die Anordnung eine etwas verschiedene ist, und dass die Vorzeichen entgegengesetzt sind. Somit ergiebt sich

$$(31)\qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Aus dieser partiellen Differential-Gleichung folgt sofort, dass die Function f nur von dem **einen** Argument $y - x$ abhängen kann, also zu bezeichnen ist mit $f(y - x)$.

Die Formel (27) kann demnach gegenwärtig so geschrieben werden:

$$(32) \qquad f(y-x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \, J^n(x) \; O^n(y).$$

Die festgesetzte Beschränkung $mod\ x < mod\ y$ erlaubt, x gleich 0 zu setzen. Nach der Definition der Bessel'schen Functionen (Seite 5) ist aber

$$J^0(0) = 1, \qquad J^1(0) = J^2(0) = J^3(0) = \cdots\cdots = 0.$$

Für den Specialfall $x = 0$ geht unsere Formel (32) demnach über in:

$$f(y) = \varepsilon_0 \; O^0(y),$$

oder, weil $\varepsilon_0 = 1$, und $O^0(y) = \frac{1}{y}$ ist (Seite 14), in:

$$(33) \qquad f(y) = \frac{1}{y}.$$

Diese für ein beliebiges y erhaltene Gleichung bleibt richtig, wenn man dem y irgend welche Werthe, z. B. den Werth $y-x$ beilegt. Hierdurch aber ergiebt sich:

$$(34) \qquad f(y-x) = \frac{1}{y-x}.$$

Substituirt man diesen für $f(y-x)$ gefundenen Ausdruck in (32), so gelangt man zu folgendem wichtigen Satz:

Sind x, y complexe, der Bedingung $mod\ x < mod\ y$ unterworfene Variable, so kann der Bruch $\frac{1}{y-x}$ in folgende Reihe entwickelt werden:

$$(35) \qquad \frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \, J^n(x) \; O^n(y).$$

Diese Entwicklung wird nämlich, so lange die Bedingung $mod\ x < mod\ y$ erfüllt ist, jederzeit gültig) sein.*

Gleiches gilt von allen denjenigen Entwicklungen, die aus der vorstehenden Formel erhalten werden durch (beliebig oft wiederholtes) Differenziren nach x und y.

Der hier angehängte Zusatz ergiebt sich unmittelbar durch Benutzung des vorhergehenden Satzes (Seite 30).

Aus dem eben erhaltenen Resultat (35) ersehen wir, dass die Functionen O in der That derjenigen Anforderung entsprechen,

---

*) Siehe die Randbemerkung auf Seite 4.

welche ursprünglich (Seite 9) an sie gestellt wurde, und welche damals auf einem sehr hypothetischen Wege zu ihrer Entdeckung hinleitete.

§ 13. Entwicklung nach Bessel'schen Functionen erster Art.

Auf der zEbene mag ein Kreis beschrieben sein um den Punct 0, und $f(z)$ mag eine beliebig gegebene Function sein, welche innerhalb dieses Kreises eindeutig und stetig ist. Bezeichnet man die Randpuncte des Kreises mit z, und irgend einen Punct in seinem Innern mit c, so ist nach der Cauchy'schen Formel (Seite 1):

$$(1) \qquad f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)\, d(z)}{z-c},$$

die Integration positiv hinerstreckt um den Kreis. Nach dem vorhergehenden Satz und mit Rücksicht darauf, dass $mod\ c < mod\ z$ ist, erhalten wir:

$$(2) \qquad \frac{1}{z-c} = \varepsilon_0\, O^0(z)\, J^0(c) + \varepsilon_1\, O^1(z)\, J^1(c) + \varepsilon_2\, O^2(z)\, J^2(c) + \cdots\cdots$$

Die Bedingung $mod\ c < mod\ z$ wird, weil z ein Punct am Rande des Kreises ist, erfüllt sein, so lange c innerhalb des Kreises bleibt (und nicht etwa hart an den Rand rückt). So lange also c innerhalb des Kreises sich befindet, wird die vorstehende Entwicklung (2) gültig sein.

Substituirt man den durch diese Entwicklung dargebotenen Werth von $\frac{1}{z-c}$ in die Formel (1), so erhält man:

$$(3) \qquad f(c) = \alpha_0\, J^0(c) + \alpha_1\, J^1(c) + \alpha_2\, J^2(c) + \cdots\cdots,$$

wo die Coefficienten α folgende Werthe haben:

$$(4) \qquad \alpha_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \int f(z)\, O^n(z)\, dz,$$

die Integration positiv hinerstreckt um den gegebenen Kreis.

Dass diese Entwicklung (3) gültig ist, so lange c innerhalb des gegebenen Kreises bleibt, unterliegt keinem Zweifel. Denn die in diesem Falle vorhandene Gültigkeit der Reihe (2) muss sich, wie leicht zu übersehen, übertragen auf die Reihe (3).

Differenzirt man die Formel (3) $p$mal nach c, so ergiebt sich:

$$(5) \qquad \frac{\partial^p f(c)}{\partial c^p} = \alpha_0 \frac{\partial^p J^0(c)}{\partial c^p} + \alpha_1 \frac{\partial^p J^1(c)}{\partial c^p} + \alpha_2 \frac{\partial^p J^2(c)}{\partial c^p} + \cdots\cdots$$

Fraglich ist indessen, ob die so erhaltene Entwicklung des p^{ten} Differential-Quotienten von $f(c)$ eine gültige ist.

Die Formeln (1) und (2) können (was bei der einen unmittelbar evident, bei der andern eine Folge des vorhergehenden Satzes ist) beliebig oft nach c differenzirt werden, ohne dadurch in ihrer Gültigkeit beeinträchtigt zu werden. Bei p maliger Differentiation ergiebt sich:

$$(6)\qquad \frac{\partial^p f(c)}{\partial c^p} = \frac{\Pi p}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{(z-c)^{p+1}},$$

$$(7)\qquad \frac{\Pi p}{(z-c)^{p+1}} = \varepsilon_0\, O^0(z)\,\frac{\partial^p J^0(c)}{\partial c^p} + \varepsilon_1 O^1(z)\,\frac{\partial^p J^1(c)}{\partial c^p} + \cdots\cdots$$

Hieraus aber folgt, wenn man in der ersten Formel für $\frac{\Pi p}{(z-c)^{p+1}}$ denjenigen Werth substituirt, welchen die zweite darbietet:

$$(8)\qquad \frac{\partial^p f(c)}{\partial c^p} = \beta_0\,\frac{\partial^p J^0(c)}{\partial c^p} + \beta_1\,\frac{\partial^p J^1(c)}{\partial c^p} + \cdots\cdots\cdots,$$

wo die Coefficienten β folgende Werthe besitzen:

$$(9)\qquad \beta_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i}\int f(z)\;O^n(z)\,dz.$$

Die hier erhaltene Entwicklung (8) bleibt (ebenso wie die Formeln (6), (7), aus welchen sie entsprungen ist) gültig, so lange der Punct c im Innern des gegebenen Kreises liegt. Diese Entwicklung aber ist identisch mit der in (5), denn die Coefficienten β in (9) sind identisch mit den Coefficienten α in (4). Hiermit ist die vorhin angeregte Frage erledigt.

Wir können die Resultate unserer Untersuchung so zusammenfassen (den Buchstaben z ersetzen wir dabei durch c).

Für jede Function $f(z)$, welche innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunct 0 eindeutig und stetig bleibt, existirt eine Entwicklung:

$$(10)\qquad f(z) = \alpha_0\, J^0(z) + \alpha_1\, J^1(z) + \alpha_2\, J^2(z) + \cdots\cdots\cdots,$$

welche gültig ist für alle Puncte innerhalb des Kreises.

Die Coefficienten α finden ihre Bestimmung durch die Formel

$$(11)\qquad \alpha_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i}\int f(z)\;O^n(z)\,dz,$$

die Integration positiv hinerstreckt um den Kreis.

Jede solche Entwicklung (10) *kann, ohne Beeinträchtigung ihres Gültigkeits-Gebietes, beliebig oft nach z differenzirt werden.*

Sobald die Existenz einer gültigen Entwicklung von der Form (10) einmal nachgewiesen ist, kann man übrigens zu den Werthen der Coefficienten α auch dadurch gelangen, dass man die Integral-Eigenschaften der Bessel'schen Functionen (Seite 19) in Anwendung bringt. Dieses Verfahren führt augenblicklich zu den in (11) bereits hingestellten Werthen, führt aber ausserdem (wie leicht zu übersehen ist) noch zu zwei Bemerkungen. Erstens ergiebt sich nämlich, dass die bei Berechnung der α auszuführende Integration (11) hinerstreckt werden kann über eine beliebige geschlossene Curve, welche innerhalb des gegebenen Kreises liegt, und ein den Punct 0 enthaltendes Gebiet umgrenzt. Zweitens ergiebt sich, dass eine Entwicklung von der Form (10) bei jeder gegebenen Function $f(z)$ immer nur auf einerlei Art bewerkstelligt werden kann.

§ 14. Entwicklung nach Differential-Quotienten der Bessel'schen Functionen erster Art.

Es sei wiederum ein Kreis gegeben, der in der z Ebene um den Punct 0 herumläuft. Ist $f(z)$ oder f innerhalb des Kreises eindeutig und stetig, so repräsentirt das vom Puncte 0 in beliebiger Bahn fortgehende, in seiner Bewegung jedoch auf den gegebenen Kreis beschränkte Integral

$$\varphi = \int_0^z f\,dz$$

eine von z abhängende Function, welche ebenfalls innerhalb des Kreises überall eindeutig und stetig ist*). Nun ist $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = f$. Demgemäss können wir uns auch so ausdrücken. Ist f innerhalb des Kreises eindeutig und stetig, so existirt jederzeit eine andere, mit denselben Eigenschaften behaftete Function φ, welche zu f in der Beziehung steht $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = f$. Nehmen wir nun φ statt f, so ergiebt sich die Existenz einer dritten mit jenen Eigenschaften behafteten Function ψ, welche zu φ in der Beziehung steht $\frac{\partial \psi}{\partial z} = \varphi$, u. s. w. Demgemäss gelangen wir zu folgendem Satz.

*) Vergl. meine „Vorlesungen über Riemann's Th. der Abelschen Integrale" Seite 335.

Ist die Function $f(z)$ innerhalb des gegebenen Kreises eindeutig und stetig, so existirt jederzeit eine andere mit denselben Eigenschaften behaftete Function $F(z)$, welche zu jener in der Beziehung steht:

$$\frac{\partial^p F(z)}{\partial z^p} = f(z). \tag{12}$$

Durch Anwendung des vorhergehenden Satzes (Seite 34) auf die neue Function $F(z)$ erhalten wir eine Entwicklung

$$F(z) = \alpha_0 J^0(z) + \alpha_1 J^1(z) + \alpha_2 J^2(z) + \cdots\cdots, \tag{13}$$

welche gültig ist für alle Puncte z des gegebenen Kreises, und welche in ihrer Gültigkeit keine Beeinträchtigung erleidet durch beliebig oft wiederholtes Differenziren. Demnach gelangen wir durch $p$malige Differentiation zu einer Formel:

$$f(z) = \frac{\partial^p F(z)}{\partial z^p} = \alpha_0 \frac{\partial^p J^0(z)}{\partial z^p} + \alpha_1 \frac{\partial^p J^1(z)}{\partial z^p} + \cdots\cdots, \tag{14}$$

durch welche die ursprüngliche Function $f(z)$ in gültiger Weise entwickelt wird nach den p^{ten} Differential-Quotienten der Bessel'schen Functionen. Wir haben somit folgenden Satz:

Versteht man unter p eine beliebig gegebene positive ganze Zahl, so wird für jede Function $f(z)$, welche innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunct 0 eindeutig und stetig bleibt, eine Entwicklung existiren:

$$f(z) = \alpha_0 \frac{\partial^p J^0(z)}{\partial z^p} + \alpha_1 \frac{\partial^p J^1(z)}{\partial z^p} + \alpha_2 \frac{\partial^p J^2(z)}{\partial z^p} + \cdots\cdots, \tag{15}$$

*welche gültig ist für alle Puncte innerhalb des Kreises.**)

§ 15. Entwicklung nach Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art.

Auf der zEbene sei gegeben eine ringförmige Fläche, begrenzt von zwei concentrischen Kreisen, deren Mittelpunct in 0

---

*) Auf Grund der Seite 4 angegebenen Sätze, namentlich auch auf Grund des Thomé'schen Satzes, und durch Benutzung einer Methode, die vollständig analog ist der eben angewendeten, gelangt man zu einem ähnlichen Satz in Betreff der Kugelfunctionen, welcher so lautet:

Versteht man unter p eine beliebig gegebene positive ganze Zahl, so wird für jede Function $f(z)$, welche eindeutig und stetig bleibt innerhalb einer Ellipse mit den Brennpuncten $z = \pm 1$, eine Entwicklung existiren:

$$f(z) = \alpha_0 \frac{\partial^p P^0(z)}{\partial z^p} + \alpha_1 \frac{\partial^p P^1(z)}{\partial z^p} + \alpha_2 \frac{\partial^p P^2(z)}{\partial z^p} + \cdots\cdots,$$

welche gültig ist für alle Puncte im Innern der Ellipse, und in welcher die α constante Coefficienten sind.

liegt; ferner sei $f(z)$ eine beliebig gegebene Function, welche auf dieser Fläche überall eindeutig und stetig ist. Ist c irgend ein zu der Fläche gehöriger Punct, so erhalten wir (Seite 1):

$$(1) \qquad f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)\,dz}{z-c},$$

oder in genauerer Darstellung:

$$(2) \qquad f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{a}} \frac{f(z)\,dz}{z-c} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{i}} \frac{f(z)\,dz}{z-c},$$

wo die Integrationen am Rande der Fläche in positiver Richtung hinlaufen, die erste am **äussern**, die zweite am **innern** Rande (wie solches angedeutet wird durch die Suffixe $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{i}$). Die Richtungen der beiden Integrationen sind daher (vergl. die Auseinandersetzung auf Seite 1) **untereinander entgegengesetzt**. Um beide Richtungen **untereinander gleichlaufend** zu machen, ändern wir bei dem zweiten Integral das Vorzeichen. Diese Aenderung des Vorzeichens bewerkstelligen wir dadurch, dass wir in jenem zweiten Integral den Nenner $z-c$ umändern in $c-z$, und erhalten alsdann:

$$(3) \qquad f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{a}} \frac{f(z)\,dz}{z-c} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{i}} \frac{f(z)\,dz}{c-z}.$$

Die erste Integration geht nun nach wie vor am äussern Rande positiv herum; und die zweite am innern Rande ist mit der ersten **gleichlaufend**. Kürzer ausgedrückt: **Beide Integrationen in (3) laufen positiv herum um den Punct 0.***)

Für das **erste** Integral in (3) ist $\operatorname{mod} c < \operatorname{mod} z$, also (zufolge des Satzes Seite 32):

$$(4) \qquad \frac{1}{z-c} = \varepsilon_0\, O^0(z)\, J^0(c) + \varepsilon_1\, O^1(z) J^1(c) + \varepsilon_2\, O^2(z)\, J^2(c) + \cdots$$

Für das **zweite** Integral hingegen ist $\operatorname{mod} z < \operatorname{mod} c$, mithin (zufolge eben desselben Satzes):

$$(5) \qquad \frac{1}{c-z} = \varepsilon_0\, J^0(z)\, O^0(c) + \varepsilon_1 J^1(z)\, O^1(c) + \varepsilon_2 J^2(z)\, O^2(c) + \cdots$$

---

*) Betrachtet man einen Punct als eine unendlich kleine Kreisfläche, so wird eine (in grösserer oder geringerer Entfernung) um den Punct laufende Bewegung positiv genannt, sobald sie in gleichem Sinne stattfindet mit einer positiven Umlaufung jener kleinen Kreisfläche. Vergl. meine „Vorlesungen" Seite 72.

Durch Substitution dieser Entwicklungen (4), (5) in die Formel (3) ergiebt sich:

$$(6)\qquad f(c) = \alpha_0 J^0(c) + \alpha_1 J^1(c) + \alpha_2 J^2(c) + \cdots\cdot + \beta_0 O^0(c) + \beta_1 O^1(c) + \beta_2 O^2(c) + \cdots\cdots,$$

wo die Coefficienten α, β folgende Werthe haben:

$$(7)\qquad \alpha_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i}\int\limits_{a} f(z)\, O^n(z)\, dz, \qquad \beta_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i}\int\limits_{i} f(z) J^n(z)\, dz,$$

die Integrationen ebenso hinerstreckt, wie bei (3) angegeben.

Die Entwicklungen (4), (5) sind (Satz Seite 32) jederzeit gültig, so lange c im Innern der gegebenen ringförmigen Fläche bleibt (und nicht etwa hart heranrückt an ihren äussern oder innern Rand). Gleiches gilt daher auch von der Entwicklung (6). Ausserdem ist zu bemerken, dass diese Entwicklung (6) bei wiederholter Differentiation nach c in ihrer Gültigkeit nicht beeinträchtigt wird, wie sich solches leicht durch eine Betrachtung erweisen lässt, ähnlich derjenigen auf Seite 34. Wir gelangen somit zu folgendem Satz:

Für jede Function $f(z)$, welche eindeutig und stetig ist auf einer von zwei concentrischen Kreisen mit dem Mittelpunct 0 *begrenzten ringförmigen Fläche existirt eine Entwicklung:*

$$(8)\qquad f(z) = \alpha_0 J^0(z) + \alpha_1 J^1(z) + \alpha_2 J^2(z) + \cdots\cdots + \beta_0 O^0(z) + \beta_1 O^1(z) + \beta_2 O^2(z) + \cdots\cdots,$$

welche gültig ist für alle Puncte jener ringförmigen Fläche.

Die Coefficienten α, β finden ihre Bestimmung durch die Formeln:

$$(9)\qquad \alpha_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i}\int\limits_{a} f(z)\, O^n(z)\, dz, \qquad \beta_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i}\int\limits_{i} f(z)\, J^n(z)\, dz,$$

wo die Integrationen, am äussern und innern Rande der Fläche hinlaufend, eine positive Bewegung haben um den Punct 0.

Jede solche Entwicklung (8) *kann, ohne Beeinträchtigung ihres Gültigkeits-Gebietes, beliebig oft nach z differenzirt werden.*

Die Formeln (9) sind eigentlich überflüssig. Denn sobald die Existenz der Entwicklung (8) nachgewiesen ist, kann man die in ihr enthaltenen Coefficienten α, β unmittelbar bestimmen durch Anwendung der Integral-Eigenschaften der Bessel'schen Functionen (Seite 19). Bei dieser Methode der Coefficientenbe-

stimmung ergiebt sich, dass die Integrationen in den Formeln (9) nicht nothwendig gebunden sind an die beiden Randcurven, dass sie vielmehr ebensogut auch hinerstreckt werden können über eine beliebige geschlossene Curve, welche innerhalb der gegebenen ringförmigen Fläche liegt und ein den Punct 0 enthaltendes Gebiet umgrenzt. Ferner ergiebt sich aus jener Methode, dass eine gegebene Function $f(z)$ in eine Reihe von der Form (8) immer nur auf einerlei Art entwickelt werden kann.

§ 16. Beispiele für die Entwicklung nach Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art.

Eine positive ganze Potenz von z ist auf der zEbene überall stetig, also zufolge des Satzes (Seite 34) darstellbar durch eine nach den $J^n(z)$ fortschreitende Reihe, welche auf der zEbene allenthalben gültig bleibt. Mit Hülfe jenes Satzes gelangt man, was die geraden Potenzen anbetrifft, zu folgenden Resultaten:

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
1 &= J^0(z) + 2\,J^2(z) + 2\,J^4(z) + 2\,J^6(z) + 2\,J^8(z) + \cdots\cdots,\\
z^2 &= 2\,\Sigma\, nn\, J^n(z),\\
z^4 &= 2\,\Sigma (n-2)\, nn\, (n+2)\, J^n(z),\\
z^6 &= 2\,\Sigma (n-4)\,(n-2)\, nn\, (n+2)\,(n+4)\, J^n(z),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

wo die Summationen Σ hinzuerstrecken sind über die Zahlen $n=0, 2, 4, 6, 8, \cdots \infty$. Andererseits erhält man für die ungeraden Potenzen die Formeln:

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
z &= 2\,\Sigma\, n\, J^n(z),\\
z^3 &= 2\,\Sigma\,(n-1)\, n\,(n+1)\, J^n(z),\\
z^5 &= 2\,\Sigma\,(n-3)\,(n-1)\, n\,(n+1)\,(n+3)\, J^n(z),\\
z^7 &= 2\,\Sigma\,(n-5)\,(n-3)\,(n-1)\, n\,(n+1)\,(n+3)\,(n+5)\, J^n(z),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

wo die Summationen Σ hinlaufen über $n = 1, 3, 5, 7, \cdots \infty$. Diese Entwicklungen (1) und (2) sind also gültig für jeden beliebigen Werth von z, gültig für sämmtliche Puncte der zEbene.*)

Eine negative ganze Potenz von z ist auf der zEbene überall

*) Die erste der Formeln (1) und die erste der Formeln (2) sind identisch mit den auf Seite 7 gefundenen Formeln (6. a, b).

stetig, ausser im Puncte 0, und muss daher (zufolge des Satzes Seite 38) darstellbar sein durch eine nach den $J^n(z)$ und $O^n(z)$ fortschreitende Doppelreihe, und zwar durch eine Doppelreihe, welche auf der zEbene, mit Ausnahme des Punktes 0, überall gültig bleibt. Bestimmt man die Coefficienten dieser Reihe durch die (Seite 38) gegebenen Formeln, so findet man, dass die Coefficienten der $J^n(z)$ sämmtlich verschwinden, und dass andererseits die Coefficienten der $O^n(z)$ nur bis zu einem gewissen Range hin Werthe besitzen, später aber ebenfalls verschwinden. Man erhält daher für jede negative ganze Potenz von z ein gewisses aus den $O^n(z)$ zusammengesetztes Aggregat. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{(-1)^p}{2^{p+q}\Pi_p\Pi_q} = C_{pq}, \tag{3}$$

so ergeben sich für die geraden Potenzen folgende Formeln:

$$\begin{aligned} z^{-2} &= 2C_{01}\,O^1(z), \\ z^{-4} &= 2C_{12}\,O^1(z) + 2C_{03}\,O^3(z), \\ z^{-6} &= 2C_{23}\,O^1(z) + 2C_{14}\,O^3(z) + 2C_{05}\,O^5(z), \\ z^{-8} &= 2C_{34}\,O^1(z) + 2C_{25}\,O^3(z) + 2C_{16}\,O^5(z) + 2C_{07}\,O^7(z), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Andererseits findet man für die ungeraden Potenzen:

$$\begin{aligned} z^{-1} &= C_{00}\,O^0(z), \\ z^{-3} &= C_{11}\,O^0(z) + 2C_{02}\,O^2(z), \\ z^{-5} &= C_{22}\,O^0(z) + 2C_{13}\,O^2(z) + 2C_{04}\,O^4(z), \\ z^{-7} &= C_{33}\,O^0(z) + 2C_{24}\,O^2(z) + 2C_{15}\,O^4(z) + 2C_{06}\,O^6(z), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Am leichtesten gelangt man übrigens zu diesen Darstellungen (4), (5) dadurch, dass man ausgeht von der (Seite 32 gefundenen) Entwicklung:

$$\frac{1}{z-c} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n\,J^n(c)\,O^n(z),$$

welche gültig bleibt, so lange $mod\ c < mod\ z$ ist. Differenzirt man diese Formel wiederholt nach c, und setzt dann jedesmal $c=0$, so erhält man successive die Werthe von z^{-1}, z^{-2}, z^{-3}, z^{-4}, ...

Als weitere Beispiele für die Entwicklung nach Bessel'schen Functionen mögen noch folgende Formeln angeführt werden:

$$\begin{aligned} \cos z &= J^0(z) - 2J^2(z) + 2J^4(z) - 2J^6(z) + \cdots, \\ \sin z &= 2J^1(z) - 2J^3(z) + 2J^5(z) - 2J^7(z) + \cdots, \\ J^0(c+z) &= J^0(c)J^0(z) - 2J^1(c)J^1(z) + 2J^2(c)J^2(z) - \\ &\quad - 2J^3(c)J^3(z) + \cdots, \end{aligned} \tag{6}$$

wo in der letzten c eine beliebige Grösse repräsentirt. Diese Entwicklungen (6) sind gültig für beliebige Werthe von z, also gültig für sämmtliche Puncte der zEbene.

Dritter Abschnitt.

Die Bessel'sche Differentialgleichung.

§ 17. Die zur Bessel'schen Function J^0 complementäre Function Y^0.

Die Function $J^0(z)$ oder J^0 ist (Seite 5) eine particuläre Lösung der Gleichung

$$(1) \qquad [F] = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\,\frac{\partial F}{\partial z} + F = 0,$$

deren linke Seite zur Abkürzung bezeichnet sein mag mit $[F]$.

Es sei $Y^0(z)$ oder Y^0 die andere particuläre Lösung dieser Gleichung. Um Y^0 zu finden, setzen wir nach bekannter Methode:

$$(2) \qquad Y^0 = J^0 U,$$

und erhalten dann für U die Gleichung:

$$\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{J^0}\,\frac{\partial J^0}{\partial z}\right)\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Hieraus folgt, wenn man mit $\frac{\partial U}{\partial z}$ dividirt und integrirt:

$$\log z + 2 \log J^0 + \log \frac{\partial U}{\partial z} = \text{Const.}$$

oder:

$$z\, J^0 J^0\, \frac{\partial U}{\partial z} = e^{\text{Const.}},$$

oder, wenn man die willkührliche Const. gleich 0 nimmt:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{z J^0 J^0}.$$

U selber ist daher dargestellt durch das unbestimmte Integral:

$$U = \int \frac{dz}{z J^0 J^0}.$$

Substituirt man diesen Werth in (2), so erhält man die gesuchte zweite particuläre Lösung

$$(3)\qquad Y^0 = J^0 \int \frac{dz}{z J^0 J^0}$$

Nun ist (Seite 5):

$$(4)\qquad J^0 = 1 - \frac{z^2}{2\cdot 2} + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 4} - \frac{z^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2\cdot 4\cdot 6} + \cdots\cdots$$

Hieraus folgt:

$$(5)\qquad \frac{1}{z J^0 J^0} = \frac{1}{z}\left(1 + Az^2 + Bz^4 + Cz^6 + \cdots\cdots\right),$$

wo $A, B, C, \cdots\cdot$ Zahlen sind, die sich bei einiger Geduld leicht berechnen lassen, indessen kein sehr einfaches Gesetz befolgen. Substituiren wir den Werth (5) in die Formel (3), so erhalten wir:

$$(6.a)\qquad Y^0 = J^0 \log z + J^0\left(A\frac{z^2}{2} + B\frac{z^4}{4} + C\frac{z^6}{6} + \cdots\cdots\right),$$

oder, wenn wir den zweiten Theil dieses Ausdrucks mit E^0 bezeichnen:

$$(6.b)\qquad Y^0 = J^0 \log z + E^0.$$

E^0 ist das Product zweier unendlichen Reihen, deren eine J^0 selber ist. Jede von diesen Reihen läuft fort nach positiven ganzen Potenzen von z. Demnach steht zu vermuthen, dass E^0 eine Function sein werde, welche auf der zEbene eindeutig und stetig ist*). Ist solches der Fall, so muss E^0 entwickelbar sein in eine nach den $J^n(z)$ fortschreitende Reihe (zufolge des Satzes Seite 34). Auch werden alsdann in dieser Entwicklung nur die geraden $J^n(z)$ vorkommen können, weil jede der beiden Reihen, aus denen E^0 besteht, nur gerade Potenzen von z enthält.

So werden wir dahin geführt, für die zweite particuläre Lösung Y^0 folgenden Ansatz zu versuchen:

$$(7)\qquad Y^0 = J^0 \log z + \alpha J^0 + \beta J^2 + \gamma J^4 + \delta J^6 + \cdots\cdots$$

Zu untersuchen ist also, ob die $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots\cdot$ der Art bestimmt werden können, dass diese Reihe der Differentialgleichung (1) Genüge leistet, und zweitens, ob die so entstehende Reihe brauchbar, d. h. convergent ist.

*) Mit Bestimmtheit lässt sich hierüber einstweilen noch nicht urtheilen, weil wir mit der Natur der einen in E^0 als Factor auftretenden Reihe unbekannt sind, und nicht wissen, ob dieselbe convergirt, oder auf welches Gebiet ihre Convergenz beschränkt ist.

Bildet man den in (1) angegebenen Ausdruck

$$[F] = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial F}{\partial z} + F \tag{8}$$

für die Function $F = J^0 . \log z$, und beachtet man dabei, dass J^0 selber der Gleichung (1), d. i. der Gleichung $[J^0] = 0$ Genüge leistet, so erhält man:

$$[J^0 \log z] = \frac{2}{z}\frac{\partial J^0}{\partial z}. \tag{9}$$

Um ferner jenen Ausdruck $[F]$ für die Function $F = J^n$ zu erhalten, bemerken wir, dass diese Function (nach Seite 5) Genüge leistet der Differential-Gleichung:

$$\frac{\partial^2 J^n}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial J^n}{\partial z} + J^n = \frac{n^2}{z^2} J^n.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber identisch mit $[J^n]$. Wir erhalten daher:

$$[J^n] = \frac{n^2}{z^2} J^n. \tag{10}$$

Hieraus folgt für $n = 0$:

$$[J^0] = 0, \tag{11.a}$$

und andererseits für $n > 0$, mit Rücksicht auf die recurrirenden Formeln (Seite 22):

$$[J^n] = \frac{n}{2z}(J^{n-1} + J^{n+1}). \tag{11.b}$$

Endlich ergiebt sich aus (9), mit Rücksicht auf die Differential-Formeln (Seite 20):

$$[J^0 \log . z] = -\frac{2}{z} J^1. \tag{11.c}$$

Zufolge unseres Ansatzes (7) ist

$$[Y^0] = [J^0 \log z] + \alpha[J^0] + \beta[J^2] + \gamma[J^4] + \delta[J^6] + \cdots\cdots, \tag{12}$$

also mit Benutzung der in (11. a, b, c) gefundenen Resultate:

$$\begin{aligned}[Y^0] = -\frac{2}{z}J^1 &+ \frac{\beta}{z}(J^1 + J^3) \\ &+ \frac{2\gamma}{z}(J^3 + J^5) \\ &+ \frac{3\delta}{z}(J^5 + J^7) \\ &+ \frac{4\varepsilon}{z}(J^7 + J^9) \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \tag{13}$$

Soll nun Y^0 eine particuläre Lösung der Differential-Gleichung (1) sein, also Genüge leisten der Gleichung $[Y^0] = 0$, so muss der vorstehende Ausdruck verschwinden. Solches aber geschieht in der That, sobald man die Coefficienten β, γ, δ, ε, $\cdots$ den Relationen

$-2+\beta=0,\ 1\cdot\beta+2\gamma=0,\ 2\gamma+3\delta=0,\ 3\delta+4\varepsilon=0$, etc. etc.

unterwirft, d. i. sobald man für jene Coefficienten folgende Werthe wählt:

$$(14)\qquad 2=+\beta=-2\gamma=+3\delta=-4\varepsilon=+5\zeta=\cdots\cdots\cdots$$

Substituirt man diese Werthe (14) in (7), so wird:

$$(15)\qquad Y^0 = J^0 \log z + \alpha J^0 + \\ + 2\left(\frac{1}{1} J^2 - \frac{1}{2} J^4 + \frac{1}{3} J^6 - \frac{1}{4} J^8 + \cdots\cdots\right).$$

So haben wir für die zweite particuläre Lösung der vorgelegten Differential-Gleichung (1), durch Benutzung der Functionen J^n, eine nach einfachem Gesetz fortschreitende Reihe gefunden. Dass diese Reihe stets (und zwar ziemlich stark) convergirt, unterliegt keinem Zweifel. Um sich davon zu überzeugen, braucht man nur einen Blick auf die früher für z, z^2, z^3, $\cdots$ gefundenen Entwicklungen (Seite 39) zu werfen, die nicht abnehmende, sondern wachsende Zahlencoefficienten enthalten, und (wie strenge bewiesen ist) trotzdem convergent sind.

In dem für Y^0 erhaltenen Werth (15) ist der Coefficient α willkührlich geblieben, was *a priori* zu erwarten stand, weil die mit α multiplicirte Function J^0 schon an und für sich eine Lösung der gegebenen Differential-Gleichung ist. Der Einfachheit willen setzen wir $\alpha = 0$. Das so erhaltene Resultat mag, mit Rücksicht auf unsere ferneren Untersuchungen, folgendermassen formulirt werden.

Die beiden particulären Lösungen der Differential-Gleichung

$$(16)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial F}{\partial z} + F = 0,$$

sind dargestellt durch die Bessel'sche Function J^0, und durch eine gewisse andere Function Y^0. Diese letztere wird repräsentirt durch das Aggregat:

$$(17)\qquad Y^0 = L^0 + E^0,$$

wo L^0 und E^0 folgende Bedeutungen haben:

$$(18)\qquad \begin{aligned} L^0 &= J^0 \log z, \\ E^0 &= 2\left(\frac{1}{1}J^2 - \frac{1}{2}J^4 + \frac{1}{3}J^6 - \frac{1}{4}J^8 + \frac{1}{5}J^{10} - \cdots\cdots\right). \end{aligned}$$

*E^0 ist hier dargestellt durch eine stets convergente Reihe, und ist daher eine Function von z, welche auf der z Ebene allenthalben eindeutig und stetig bleibt.**)

Die **vollständige** Lösung der Differential-Gleichung (16) wird lauten

$$AJ^0 + BY^0,$$

wo A, B willkührliche Constanten sind.

§ 18. Die Function Y^0 ausgedrückt durch ein bestimmtes Integral.

Für ein gerades n, also für $n = 2p$ haben wir (Seite 6) gefunden:

$$(19)\qquad J^{2p} = \int_0^\pi \frac{\cos(z\sin\omega)}{\pi} \cos 2p\omega\, d\omega.$$

Substituiren wir diese Werthe der Functionen J^{2p} in die für E^0 gefundene Reihe (18):

$$(20)\qquad E^0 = -\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{2(-1)^p}{p} J^{2p},$$

so erhalten wir:

$$(21)\qquad E^0 = \int_0^\pi \left(\frac{\cos(z\sin\omega)}{-\pi} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{2(-1)^p \cos 2p\omega}{p} \right) d\omega,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(22)\qquad E^0 = \lim_{\alpha=1} \int_0^\pi \left(\frac{\cos(z\sin\omega)}{-\pi} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{2(-\alpha)^p \cos 2p\omega}{p} \right) d\omega.$$

---

*) Zu bemerken ist, dass L^0 und E^0 den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial F}{\partial z} + F = \pm \frac{2}{z} J^1(z)$$

Genüge leisten, wo das obere Zeichen zu nehmen ist bei E^0, das untere bei L^0.

Nun ist bekanntlich:

$$(23)\quad \log(1+2\alpha\cos 2\omega+\alpha^2)=\log(1+\alpha e^{2i\omega})+\log(1+\alpha e^{-2i\omega}),$$
$$=-\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{2(-\alpha)^p\cos 2p\omega}{p}.$$

Durch Benutzung dieser Formel können wir dem Werthe von E^0 (22) folgende Gestalt geben:

$$(24)\quad E^0=\lim_{\alpha=1}\int_0^\pi\frac{\cos(z\sin\omega)}{\pi}\log(1+2\alpha\cos 2\omega+\alpha^2)\,d\omega,$$

oder, wenn wir die Operation lim. wirklich ausführen:

$$(25)\quad E^0=\int_0^\pi\frac{\cos(z\sin\omega)}{\pi}\log(4\cos^2\omega)\,d\omega.$$

Nun ist nach (18):

$$L^0=J^0\log z,$$

oder wenn J^0 durch das bestimmte Integral (19) ausgedrückt wird:

$$(26)\quad L^0=\int_0^\pi\frac{\cos(z\sin\omega)}{\pi}\log z\,d\omega.$$

Es ist aber $Y^0=L^0+E^0$. Durch Addition der Formeln (25), (26) ergiebt sich daher für Y^0 folgender Werth:

$$(27)\quad Y^0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(z\sin\omega)\log(4z\cos^2\omega)\,d\omega.$$

Andererseits ist nach (19):

$$(28)\quad J^0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(z\sin\omega)\,d\omega;$$

Die vollständige Lösung der Gleichung (16) ist.

$$F=AJ^0+BY^0,$$

wo A, B willkührliche Constanten sind, und nimmt daher bei Einsetzung der Werthe (27), (28) folgende Form an:

$$(29)\quad F=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(z\sin\omega)\Big(A+B\log(4z\cos^2\omega)\Big)\,d\omega.$$

Führt man statt A, B andere willkührliche Constanten C, D ein, indem man setzt:

$$\frac{A + B \log 4}{\pi} = C, \qquad \frac{B}{\pi} = D$$

so ergiebt sich:

$$(30) \qquad F = \int_0^\pi \cos(z \sin \omega) \Big(C + D \log (z \cos^2 \omega) \Big) \, d\omega.$$

Somit haben wir in (27), (28) *und* (30) *die* ***beiden particulären*** *und die* ***vollständige*** *Lösung der Differential-Gleichung* (16) *in Form bestimmter Integrale ausgedrückt.*

Zu der Formel (30) für die vollständige Lösung kann man übrigens auch gelangen durch Benutzung einer Untersuchung von Poisson.

Poisson hat*) für die partielle Differential-Gleichung

$$(31) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

in welcher t, z die unabhängigen Variablen sind, und a eine gegebene Constante ist, folgende Lösung gefunden:

$$(32) \quad u = \int_0^\pi \Big(f(z \cos \omega + at) + F(z \cos \omega + at) \log (z \sin^2 \omega) \Big) \, d\omega,$$

wo f, F willkührliche Functionen sind. Nimmt man für diese Functionen die Function Cosinus, multiplicirt mit willkührlichen Constanten C, D, setzt man also (für ein beliebiges Argument x):

$$f(x) = C \cos x, \qquad F(x) = D \cos x,$$

so erhält man an Stelle von u folgende besondere Lösung:

$$U_1 = \int_0^\pi \cos (z \cos \omega + at) \Big(C + D \log (z \sin^2 \omega) \Big) \, d\omega.$$

Da die Gleichung (31) nur das **Quadrat** von a enthält, so muss derselben auch dann Genüge geschehen, wenn man in U_1 die Constante a mit $-a$ vertauscht. Bezeichnet man die so entstehende Lösung mit U_2, so ist:

$$U_2 = \int_0^\pi \cos (z \cos \omega - at) \Big(C + D \log (z \sin^2 \omega) \Big) \, d\omega.$$

---

*) Journal de l'école polytechnique. Cahier 19, Seite 227. Auch auf Seite 476 finden sich hierher gehörige Bemerkungen, die unsern Gegenstand sogar noch näher betreffen, die leider aber mit sehr störenden Druckfehlern behaftet sind.

Da nun aber U_1 und U_2 Lösungen der vorgelegten Differential-Gleichung sind, so ist offenbar $\frac{1}{2}(U_1 + U_2)$ ebenfalls eine Lösung derselben. Bezeichnet man diese letztere mit U, so wird

$$(33)\qquad U = \cos(at) . \int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\left(C + D\log(z\sin^2\omega)\right) d\omega,$$

eine Formel, welche zur augenblicklichen Abkürzung so geschrieben werden mag:

$$(33.a)\qquad U = \cos(at) . \int_0^\pi \psi(\omega)\, d\omega.$$

Die Function $\psi(\omega)$ besitzt auf der Kreisperipherie (d. i. für die zwischen 0 und 2π liegenden Argumente ω) eine Werthenreihe, welche, den vier Kreisquadranten entsprechend, aus vier congruenten Abschnitten besteht. Sie verhält sich in dieser Hinsicht ebenso wie etwa die Function $\cos^2\omega$. Demzufolge hat das Integral $\int\psi(\omega)\,d\omega$, mag man nun die Integration über die beiden ersten Quadranten, oder mag man sie über den zweiten und dritten Quadranten hinerstrecken, in beiden Fällen ein und denselben Werth. D. h. es ist:

$$\int_0^\pi \psi(\omega)\, d\omega = \int_0^\pi \psi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) . d\omega.$$

Hierdurch geht die Formel (33.a) über in

$$U = \cos(at) . \int_0^\pi \psi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) d\omega,$$

d. i., wenn man die eigentliche Bedeutung von ψ restituirt:

$$(34)\qquad U = \cos(at) . \int_0^\pi \cos(z\sin\omega)\left(C + D\log(z\cos^2\omega)\right) d\omega.$$

Dieser Ausdruck U leistet also der Gleichung (31) Genüge. Substituirt man denselben in jene Gleichung, so zeigt sich, dass der mit $\cos(at)$ multiplicirte Factor:

$$(35)\qquad V = \int_0^\pi \cos(z\sin\omega)\left(C + D\log(z\cos^2\omega)\right) d\omega$$

Genüge leistet der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial V}{\partial z} + V = 0. \tag{36}$$

Jenes V ist aber behaftet mit zwei willkührlichen Constanten C, D, und ist daher die vollständige Lösung dieser Gleichung, oder (was dasselbe) die vollständige Lösung der Gleichung (16). So sind wir hier zu genau demselben Resultat gelangt, wie vorhin in (30) auf ganz anderm Wege.

§ 19. Die Functionen J^0 und Y^0 für sehr grosse Argumente.

Die Differential-Gleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial F}{\partial z} + F = 0, \tag{37}$$

deren particuläre Lösungen $J^0(z)$ und $Y^0(z)$ sind, kann (wie leicht zu übersehen) auch so dargestellt werden:

$$\frac{\partial^2 (F\sqrt{z})}{\partial z^2} + \left(1 + \frac{1}{4z^2}\right) F\sqrt{z} = 0. \tag{37.a}$$

Sie wird daher, falls z äusserst gross wird (mithin $\frac{1}{4z^2}$ gegen 1 vernachlässigt werden kann), übergehen in:

$$\frac{\partial^2(F\sqrt{z})}{\partial z^2} + F\sqrt{z} = 0.$$

Daraus folgt, dass jede der Differential-Gleichung (37) genügende Function F für den Fall eines äusserst grossen z dargestellt sein wird durch die Formel:

$$F\sqrt{z} = \alpha \cos z + \beta \sin z,$$

oder:

$$F = \frac{\alpha \cos z + \beta \sin z}{\sqrt{z}}, \tag{38}$$

wo α, β Constante sind. Solches muss also z. B. auch stattfinden bei den Functionen $J^0(z)$, $Y^0(z)$. Also:

Für ein äusserst grosses z sind die Werthe der Functionen $J^0(z)$, $Y^0(z)$ dargestellt durch die Formeln:

$$J^0(z) = \frac{A \cos z + B \sin z}{\sqrt{z}},$$

(39)

$$Y^0(z) = \frac{C \cos z + D \sin z}{\sqrt{z}},$$

wo A, B, C, D Constante sind. *) *Die Functionen* $J^0(z)$, $Y^0(z)$ *verschwinden daher, sobald man ihnen ein reelles Argument zertheilt, und dieses ins Unendliche anwachsen lässt.*

Für $J^n(z)$, $(Y^n z)$ *ergeben sich analoge Formeln, von denen in* (39) *nur verschieden durch andere Werthe der Constanten A, B, C, D.*

§ 20. Die zur Bessel'schen Function J^n complementäre Function Y^n.

Es mögen F und G zwei Functionen von z vorstellen, welche den Differential-Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial F}{\partial z} + F = \frac{n^2}{z^2} F,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial G}{\partial z} + G = \frac{(n+1)^2}{z^2} G$$

Genüge leisten sollen. Wir werden zunächst ein einfaches Verfahren angeben, um G zu ermitteln, falls F bekannt sein sollte.

Durch die Substitutionen:

$$(3) \qquad F = z^n \mathfrak{F},$$

$$(4) \qquad G = z^{n+1} \mathfrak{G}$$

ergeben sich für die adjungirten Functionen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ folgende einfachere Gleichungen:

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial z^2} + \frac{2n+1}{z}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} + \mathfrak{F} = 0,$$

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial z^2} + \frac{2n+3}{z}\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial z} + \mathfrak{G} = 0.$$

Die Gleichung (5) geht, wenn man sie nach z differenzirt, über in:

$$(5.a) \qquad \frac{\partial^3 \mathfrak{F}}{\partial z^3} + \frac{2n+1}{z}\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial z^2} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} = \frac{2n+1}{z^2}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}.$$

Andererseits kann die Gleichung (6) in die Form versetzt werden:

$$(6.a) \qquad \frac{\partial^2 (z\mathfrak{G})}{\partial z^2} + \frac{2n+1}{z}\frac{\partial (z\mathfrak{G})}{\partial z} + (z\mathfrak{G}) = \frac{2n+1}{z^2}(z\mathfrak{G}).$$

Ein Blick auf die Gleichungen (5.a) und (6.a) zeigt, dass eine der letztern genügende Function $\mathfrak{G}$ sofort gefunden werden kann, sobald eine der ersteren genügende Function $\mathfrak{F}$ bekannt

---

*) Die Constanten A und B sind von Poisson (Journal de l'école polyt. Cahier 19. Seite 352) bestimmt worden. Es ist $A = B = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

ist, zeigt nämlich, dass man zu diesem Zweck nur $z\,\mathfrak{G} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}$, oder allgemeiner

$$z\,\mathfrak{G} = K\,\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} \tag{7}$$

zu machen braucht, wo K eine beliebige Constante sein kann. Wir können z. B. $K = -1$ setzen, und haben dann die Formel:

$$\mathfrak{G} = -\frac{1}{z}\,\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}. \tag{8}$$

Dieser Zusammenhang zwischen den adjungirten Functionen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ überträgt sich unmittelbar auf die primitiven Functionen F, G. Ersetzt man nämlich die in (3), (4) eingeführten Functionen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ durch ihre eigentlichen Bedeutungen:

$$\mathfrak{F} = z^{-n}\,.\,F,$$
$$\mathfrak{G} = z^{-(n+1)}\,.\,G,$$

so verwandelt sich die Formel (8) in:

$$G = -z^n\,\frac{\partial}{\partial z}\left(z^{-n}F\right), \tag{9}$$

oder, was dasselbe ist, in:

$$G = \frac{n}{z}\,F - \frac{\partial F}{\partial z}. \tag{10}$$

Vermittelst dieser Formel ist man also eine Lösung G der Gleichung (2) augenblicklich anzugeben im Stande, sobald eine Lösung F der Gleichung (1) bekannt ist.

Jenen Gleichungen (1), (2) wird (vergl. Seite 5) genügt durch die Bessel'schen Functionen J^n, J^{n+1}. Und zwischen diesen beiden Functionen findet der in (10) angegebene Zusammenhang in der That statt; denn nach früher besprochenen Eigenschaften (Seite 22) ist

$$J^{n+1} = \frac{n}{z}\,J^n - \frac{\partial J^n}{\partial z}. \tag{11}$$

Bezeichnen wir die beiden andern particulären Lösungen der Gleichungen (1), (2) mit Y^n, Y^{n+1}, so können wir Y^{n+1} aus Y^n ebenfalls durch Anwendung der Formel (10) ableiten. Der Zusammenhang zwischen Y^n und Y^{n+1} wird alsdann ausgedrückt sein durch die Formel

$$Y^{n+1} = \frac{n}{z}\,Y^n - \frac{\partial Y^n}{\partial z}, \tag{12}$$

also genau derselbe sein, wie der zwischen J^n und J^{n+1}.

Von dem Werthe der Function Y^0 (Seite 44) ausgehend, kann man nach dieser Formel (12) successive Y^1, Y^2, Y^3, ... Y^n berechnen. In solcher Weise gelangt man (allerdings auf etwas beschwerlichem Wege) zu folgenden Formeln:

$$(13)\quad \begin{cases} Y^0 = L^0 + E^0, \\ Y^1 = L^1 + E^1, \\ \\ \dots\dots\dots\dots \\ Y^n = L^n + E^n. \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} L^0 = J^0 \log z, \\ L^1 = -\dfrac{J^0}{z} + J^1 \log z, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L^n = -\dfrac{\Pi n}{2}\left\{\dfrac{2^n}{n\Pi 0}\dfrac{J^0}{z^n} + \dfrac{2^{n-1}}{(n-1)\Pi 1}\dfrac{J^1}{z^{n-1}} + \dfrac{2^{n-2}}{(n-2)\Pi 2}\dfrac{J^2}{z^{n-2}} + \right. \\ \qquad\qquad \left. \dots\dots + \dfrac{2}{1\Pi(n-1)}\dfrac{J^{n-1}}{z}\right\} + J^n \log z. \end{cases}$$

$$(15)\quad \begin{cases} E^0 = -k_0 J^0 + 4\left\{\dfrac{2J^2}{2\cdot 2} - \dfrac{4J^4}{4\cdot 4} + \dfrac{6J^6}{6\cdot 6} - \dfrac{8J^8}{8\cdot 8} + \dots\dots \text{inf.}\right\}, \\ E^1 = -k_1 J^1 + 4\left\{\dfrac{3J^3}{2\cdot 4} - \dfrac{5J^5}{4\cdot 6} + \dfrac{7J^7}{6\cdot 8} - \dfrac{9J^9}{8\cdot 10} + \dots\dots \text{inf.}\right\}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ E^n = -k_n J^n + 4\left\{\dfrac{(n+2)J^{n+2}}{2(2n+2)} - \dfrac{(n+4)J^{n+4}}{4(2n+4)} + \dfrac{(n+6)J^{n+6}}{6(2n+6)} \right. \\ \qquad\qquad \left. - \dots\dots \text{inf.}\right\}, \end{cases}$$

In (15) sind dabei unter den k folgende Constanten zu verstehen: $k_0 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $k_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, u. s. w., nämlich allgemein:

$$k_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots\dots + \frac{1}{n}.$$

Bei dieser Berechnung sind die Y^n von Y^0 aus definirt durch die Formel (12). Aehnlich verhält es sich dabei mit den Functionen L^n, E^n in Bezug auf L^0, E^0. Also:

Ebenso wie die Bessel'schen Functionen J^n von ihrer Anfangsfunction J^0 aus definirt werden k ö n n e n *durch die Formel:*

$$(16.a)\qquad J^{n+1} = \frac{n}{z} J^n - \frac{\partial J^n}{\partial z}.$$

ebenso mögen die Functionen Y^n, L^n, E^n von ihren früher (Seite 44) festgesetzten Anfangsfunctionen Y^0, L^0, E^0 aus definirt sein durch die Formeln:

$$(16.b) \qquad Y^{n+1} = \frac{n}{z} Y^n - \frac{\partial Y^n}{\partial z},$$

$$(16.c) \qquad L^{n+1} = \frac{n}{z} L^n - \frac{\partial L^n}{\partial z},$$

$$(16.d) \qquad E^{n+1} = \frac{n}{z} E^n - \frac{\partial E^n}{\partial z}.$$

Dieser Definition zufolge sind alsdann J^n und Y^n die beiden particulären Lösungen der Differential-Gleichung):*

$$(17) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial F}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) F = 0.$$

Gleichzeitig ergeben sich alsdann (bei successiver Berechnung) für Y^n, L^n, E^n die in (13), (14), (15) aufgeführten Werthe.

Führt man statt der Functionen J^n, Y^n (ähnlich wie auf Seite 50) die ihnen adjungirten Functionen $\mathfrak{J}^n$, $\mathfrak{Y}^n$ ein, indem man setzt:

$$(18) \qquad J^n = z^n \mathfrak{J}^n, \qquad Y^n = z^n \mathfrak{Y}^n,$$

so sind, wie aus unserer Untersuchung (Seite 50, 51) hervorgeht, $\mathfrak{J}^n$ und $\mathfrak{Y}^n$ die beiden particulären Lösungen der Differential-Gleichung:

$$(19) \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial z^2} + \frac{2n+1}{z}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} + \mathfrak{F} = 0.$$

Gleichzeitig überträgt sich der bei den J^n und Y^n vorhandene recurrirende Zusammenhang (16.*a*, *b*) auf die $\mathfrak{J}^n$ und $\mathfrak{Y}^n$; man erhält:

$$(20) \qquad \mathfrak{J}^{n+1} = -\frac{1}{z}\frac{\partial \mathfrak{J}^n}{\partial z}, \qquad \mathfrak{Y}^{n+1} = -\frac{1}{z}\frac{\partial \mathfrak{Y}^n}{\partial z}.$$

---

*) Es mag bemerkt werden, dass die Functionen L^n und E^n Genüge leisten den Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial F}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) F = \pm \frac{2}{z} J^{n+1}(z)$$

wo bei E^n das obere, bei L^n das untere Zeichen zu nehmen ist.

Diese Formeln (20) lassen sich, wenn man, statt nach z selber, nach z^2 differenzirt, auch so darstellen:

$$(21)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{J}^{n+1} &= -2\frac{\partial \mathfrak{J}^n}{\partial z^2},\\ \mathfrak{Y}^{n+1} &= -2\frac{\partial \mathfrak{Y}^n}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Nunmehr ergiebt sich aus der ersten dieser beiden Formeln, wenn man dieselbe von $n = 0$ aus wiederholt in Anwendung bringt:

$$(22)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{J}^1 &= -2\frac{\partial \mathfrak{J}^0}{\partial z^2},\\ \mathfrak{J}^2 &= (-2)^2\frac{\partial^2 \mathfrak{J}^0}{(\partial z^2)^2},\\ \mathfrak{J}^3 &= (-2)^3\frac{\partial^3 \mathfrak{J}^0}{(\partial z^2)^3},\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \mathfrak{J}^n &= (-2)^n\frac{\partial^n \mathfrak{J}^0}{(\partial z^2)^n}, \end{aligned}$$

Zufolge (18) ist $\mathfrak{J}^n = z^{-n} J^n$ und $\mathfrak{J}^0 = J^0$. Substituirt man diese Werthe in die letzte der Formeln (22), so erhält man:

$$(23)\qquad J^n = (-2z)^n \frac{\partial^n J^0}{(\partial z^2)^n}.$$

Die zweite der Formeln (21) führt offenbar zu einem analogen Resultat in Betreff der Functionen Y^n. Also:

Die Functionen $J^n(z)$, $Y^n(z)$ hängen mit ihren Anfangsfunctionen $J^0(z)$, $Y^0(z)$ zusammen durch folgende einfache Relationen:

$$(24)\qquad \begin{aligned} J^n(z) &= (-2z)^n \frac{\partial^n J^0(z)}{(\partial z^2)^n},\\ Y^n(z) &= (-2z)^n \frac{\partial^n Y^0(z)}{(\partial z^2)^n}. \end{aligned}$$

Gleiches gilt übrigens auch bei den Functionen $L^n(z)$ nnd $E^n(z)$.

§ 21. Zusammenhang zwischen den Functionen J^n und Y^n.

Es wird bequemer sein, wenn wir statt der Functionen J^n, Y^n selber die ihnen adjungirten Functionen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{J}^n &= z^{-n} J^n,\\ \mathfrak{Y}^n &= z^{-n} Y^n, \end{aligned}$$

betrachten. Diese Functionen $\mathfrak{J}^n$, $\mathfrak{Y}^n$, welche zur augenblicklichen Abkürzung mit $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{Y}$ bezeichnet werden sollen, sind (Seite 53) die beiden particulären Lösungen der Differential-Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial z^2} + \frac{2n+1}{z} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} + \mathfrak{F} = 0. \tag{2}$$

Ich werde nun zeigen, wie man, falls nur die eine dieser beiden Lösungen, nämlich nur $\mathfrak{J}$ bekannt ist, die andere $\mathfrak{Y}$ finden kann durch Anwendung eines bestimmten Integrales; und in solcher Weise zu einem gewissen Integral-Zusammenhang zwischen den Functionen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{Y}$ gelangen.

Der aus den beiden unabhängigen Variablen z, ζ zusammengesetzte Bruch:

$$U = \frac{1}{(z^2 - \zeta^2)^{2n+1}} \tag{3}$$

genügt, wie leicht zu verificiren ist, der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{2n+1}{z} \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + \frac{2n+1}{\zeta} \frac{\partial U}{\partial \zeta}. \tag{4}$$

Dies vorausgeschickt, ziehen wir auf der zEbene eine beliebige Curve von irgend einem Punct a aus nach irgend einem andern Punct b hin, und betrachten das über diese Curven hinerstreckte Integral:

$$V = \int_a^b U \mathfrak{J} z^{2n+1}\, dz. \tag{5}$$

Da die Function $\mathfrak{J}$, wie sich aus (1) unmittelbar ergiebt, dargestellt ist durch die Reihe:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}^n = \frac{1}{2^n \Pi n} \left(1 - \frac{z^2}{2 \cdot 2n+2} + \frac{z^4}{2 \cdot 4 \cdot 2n+2 \cdot 2n+4} - \cdots\cdots \right), \tag{6}$$

folglich auf der zEbene überall stetig ist, und da ferner U, als Function von z betrachtet, nur in dem einen Puncte $z = \zeta$ unstetig ist, so wird dem Integral V ein bestimmter endlicher Werth gesichert sein, sobald wir festsetzen, dass die Integrations-Curve $a \cdots b$ den Punct ζ nicht berühren soll.

Aus (5) folgt sofort:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} + \frac{2n+1}{\zeta} \frac{\partial V}{\partial \zeta} + V = \tag{7}$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + \frac{2n+1}{\zeta} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + U \right) \mathfrak{J} z^{2n+1}\, dz,$$

also mit Rücksicht auf (4):

$$(8) \qquad = \int_a^b \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{2n+1}{z} \frac{\partial U}{\partial z} + U \right) \mathfrak{J} z^{2n+1} \, dz.$$

Nun ist, weil die Function $\mathfrak{J}$ der Gleichung (2) genügt, offenbar:

$$(9) \qquad 0 = \int_a^b \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial z^2} + \frac{2n+1}{z} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial z} + \mathfrak{J} \right) U z^{2n+1} \, dz.$$

Subtrahirt man die Formeln (8), (9) von einander, und setzt man dabei zur Abkürzung

$$(10) \qquad \mathfrak{J} \frac{\partial U}{\partial z} - U \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial z} = \Omega,$$

so erhält man:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{2n+1}{\xi} \frac{\partial V}{\partial \xi} + V = \int_a^b \left(\frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{2n+1}{z} \Omega \right) z^{2n+1} \, dz,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{2n+1}{\xi} \frac{\partial V}{\partial \xi} + V = \int_a^b \frac{\partial (z^{2n+1} \Omega)}{\partial z} \, dz,$$

$$(11) \qquad = \left[z^{2n+1} \Omega \right]_a^b,$$

$$= \left[z^{2n+1} \left(\mathfrak{J} \frac{\partial U}{\partial z} - U \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial z} \right) \right]_a^b,$$

wo für Ω sein Werth (10) wiedereingesetzt, und in üblicher Weise $\left[f(z) \right]_a^b$ für die Differenz $f(b) - f(a)$ gesetzt ist.

Das Integral V, dessen Integrations-Curve den Punct ξ nicht berühren soll, wird daher (nach 11.) eine Lösung der Differential-Gleichung

$$(12) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{2n+1}{\xi} \frac{\partial V}{\partial \xi} + V = 0$$

werden, sobald wir die Endpuncte a, b jener Curve der Art wählen, dass der Ausdruck

$$(13) \qquad \Theta = z^{2n+1} \left(\mathfrak{J} \frac{\partial U}{\partial z} - U \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial z} \right)$$

verschwindet für $z = a$, und verschwindet für $z = b$.

Zunächst ist klar, dass dieser Ausdruck Θ verschwindet für

$z = 0$. Ausserdem verschwindet derselbe unter gewissen Umständen auch für $z = \infty$. Ist nämlich z äusserst gross, so hat man (nach Seite 50):

$$J = J^n = \frac{A \cos z + B \sin z}{\sqrt{z}},$$

wo A, B Constante sind. Mit Rücksicht hierauf ergeben sich für ein solches äusserst grosses z (aus 1 und 3) folgende Formeln:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}^n = \frac{A \cos z + B \sin z}{z^n \sqrt{z}}, \qquad U = \frac{1}{z^{4n+2}},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial z} = \frac{-A \sin z + B \cos z}{z^n \sqrt{z}}, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{4n+2}{z^{4n+3}},$$

Aus diesen ergiebt sich weiter (mit Rücksicht auf 13):

$$(14) \qquad U \mathfrak{J} z^{2n+1} = \frac{A \cos z + B \sin z}{z^{3n+1} \sqrt{z}}$$

$$(15) \qquad \Theta = \frac{C \cos z + D \sin z}{z^{3n+1} \sqrt{z}}$$

nur gültig für äusserst grosse Werthe von z,

wo C, D gewisse Constante sind, ebenso wie A, B selber.

Aus (15) folgt, dass der Ausdruck Θ verschwindet, wenn wir seinem Argument z einen reellen Werth beilegen, und diesen Werth sodann ins Unendliche anwachsen lassen.

Unser Integral V wird demnach der Differential-Gleichung (12) Genüge leisten, sobald wir seine Integrations-Curve längs der reellen Achse von $z = 0$ bis $z = \infty$ fortlaufen lassen; ebenso gut aber auch dann, wenn wir jene Curve vom Puncte $z = 0$ aus zuerst auf beliebig gekrümmter Bahn nach einem andern, etwa weit entfernten, Puncte der reellen Achse, und dann von hier aus längs dieser Achse nach $z = \infty$ laufen lassen. Eine Curve letzterer Art werden wir, falls ζ auf der reellen Achse liegen sollte, in Anwendung bringen müssen, um die Berührung der Curve mit dem Punct ζ zu vermeiden.

Dass bei einer solchen bis $z = \infty$ fortlaufenden Curve das Integral V einen bestimmten endlichen Werth behält, ergiebt sich unmittelbar, wenn man beachtet, dass die unter dem Integralzeichen befindliche Function $U \mathfrak{J} z^{2n+1}$ für ein äusserst grosses z den in (14) angegebenen Werth besitzt. Auch hierbei aber ist, wie man sieht, die schon gemachte Voraussetzung, dass die letzte Strecke der Integrations-Curve mit der reellen Achse zusammenfällt, nicht zu entbehren.

Vertauschen wir also die augenblickliche Bezeichnung $\mathfrak{J}$ wieder mit der genaueren Bezeichnung $\mathfrak{J}^n$ oder $\mathfrak{J}^n(z)$, so haben wir folgendes Resultat.

Das bestimmte Integral

$$V = \int_0^\infty \frac{\mathfrak{J}^n(z) \cdot z^{2n+1}\, dz}{(z^2 - \zeta^2)^{2n+1}} \tag{16}$$

repräsentirt, wenn man die auf der z Ebene fortlaufende Integrations-Curve den Punct ζ nicht berühren, und ihre letzte Strecke mit der reellen Achse zusammenfallen lässt, eine von ζ abhängende Function, welche der Differential-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \zeta^2} + \frac{2n+1}{\zeta} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \zeta} + \mathfrak{F} = 0 \tag{17}$$

Genüge leistet.

Die ebengenannte Gleichung (17) besitzt aber, wie bei (1), (2) bemerkt wurde, zwei particuläre Lösungen, welche dargestellt sind durch die Functionen

$$\mathfrak{J}^n(\zeta), \qquad \mathfrak{Y}^n(\zeta).$$

Daraus folgt, dass die gefundene neue Lösung V mit diesen Functionen verbunden sein muss durch eine Gleichung von der Form:

$$V = \alpha\, \mathfrak{J}^n(\zeta) + \beta\, \mathfrak{Y}^n(\zeta), \tag{18}$$

wo α, β Constante sind. Wir gelangen daher (indem wir die Buchstaben z und ζ nachträglich miteinander vertauschen) zu folgendem Satz.

Zwischen den beiden particulären Lösungen $\mathfrak{J}^n(z)$ und $\mathfrak{Y}^n(z)$ der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial z^2} + \frac{2n+1}{z} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} + \mathfrak{F} = 0. \tag{19}$$

findet folgender Zusammenhang statt:

$$\alpha\, \mathfrak{J}^n(z) + \beta\, \mathfrak{Y}^n(z) = \int_0^\infty \frac{\mathfrak{J}^n(\zeta) \cdot \zeta^{2n+1}\, d\zeta}{(\zeta^2 - z^2)^{2n+1}}, \tag{20}$$

wo α, β constante Coefficienten sind, und wo die Integrations-Curve auf der ζ Ebene in solcher Weise zu führen ist, dass sie den Punct z nicht berührt, und dass gleichzeitig ihre letzte Strecke zusammenfällt mit der reellen Achse.

Ersetzt man in (20) *die adjungirten Functioneu* $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{Y}$ *durch die primitiven Functionen* J, Y *vermittelst der Relationen*

$$\mathfrak{J}^n(z) = z^{-n} J^n(z), \qquad \mathfrak{Y}^n(z) = z^{-n} Y^n(z),$$

so erhält man einen entsprechenden Zusammenhang zwischen $J^n(z)$ *und* $Y^n(z)$.

Die Werthe der Constanten α, β anzugeben, bin ich einstweilen nicht im Stande. Wären α, β ermittelt, so würde man (durch 20) die Function $Y^n(z)$ in einfacher und geschlossener Gestalt hinstellen können; die langwierigen Formeln auf Seite 52 würden dann entbehrlich sein.

Vierter Abschnitt.

Partielle Differential-Gleichungen.

§ 22. Integration einer partiellen Differential-Gleichung mit Hülfe der Bessel'schen Functionen.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Gleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + U = 0 \tag{1}$$

zu integriren, beschränken uns dabei aber auf den Fall, dass x, y reelle Werthe haben, mithin anzusehen sind als die Coordinaten eines Punctes in der xyEbene.

Es sei x_1, y_1 irgend ein fester Punct, und R die Entfernung zwischen ihm und dem beweglichen Punct x, y; also

$$R = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}. \tag{2}$$

Setzen wir die unbekannte Function

$$U = f(R),$$

so erhalten wir:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial R}\,\frac{x-x_1}{R}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial R^2}\,\frac{(x-x_1)^2}{R^2} + \frac{\partial U}{\partial R}\,\frac{R^2-(x-x_1)^2}{R^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial R}\,\frac{y-y_1}{R}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial R^2}\,\frac{(y-y_1)^2}{R^2} + \frac{\partial U}{\partial R}\,\frac{R^2-(y-y_1)^2}{R^3},$$

mithin:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{\partial U}{\partial R}\,\frac{1}{R},$$

so dass die Gleichung (1) sich verwandelt in:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\,\frac{\partial U}{\partial R} + U = 0.$$

Hieraus aber folgt (Seite 45) augenblicklich, dass zwei particuläre Lösungen der vorgelegten Differential-Gleichung dargestellt sind durch die Functionen:

$$U = J^0(R), \qquad U = Y^0(R).$$

Aus der Symmetrie dieser Functionen in Bezug auf die beiden Puncte x, y und x_1, y_1 folgt, dass sie nicht allein der Differential-Gleichung (1), sondern ebenso gut auch der analogen Differential-Gleichung mit den Variablen x_1, y_1 Genüge leisten. Also:

Versteht man unter R die Entfernung zweier Puncte x, y und x_1, y_1, so werden die Functionen

(3) $\qquad J^0(R) \qquad$ *und* $\qquad Y^0(R)$

sowohl der Differential-Gleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + U = 0, \tag{4}$$

als auch der Differential-Gleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} + U = 0 \tag{5}$$

Genüge leisten.

Die Function $J^0(R)$ bleibt eindeutig und stetig für sämmtliche Werthe von R. Sie wird 1 für $R = 0$, und verschwindet für $R = \infty$.

Die Function $Y^0(R)$ ist eindeutig und stetig für alle Werthe von R, ausser für $R = 0$. Für $R = 0$ nämlich wird sie unendlich gross. Sie verschwindet für $R = \infty$.

Diese Bemerkungen über die Functionen $J^0(R)$ und $Y^0(R)$ ergeben sich (mit Rücksicht darauf, dass R seiner Definition nach nur reelle Werthe haben kann) unmittelbar aus unseren früheren Untersuchungen (Seite 44 und 49).

Durch Einführung der Polarcoordinaten

$$x = r\cos\omega, \qquad x_1 = r_1\cos\omega_1,$$
$$y = r\sin\omega, \qquad y_1 = r_1\sin\omega_1, \tag{6}$$

geht die Entfernung R über in

$$R = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\vartheta} \tag{7}$$

wo ϑ zur Abkürzung steht für $\omega - \omega_1$. Gleichzeitig nehmen alsdann die Differential-Gleichungen (4), (5) folgende Gestalt an:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} + U = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial U}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} + U = 0. \tag{9}$$

Die gefundenen Lösungen (3) wollen wir nun zu entwickeln versuchen nach den Cosinus des Vielfachen von ϑ:

$$J^0(R) = P^0 + 2P^1 \cos\vartheta + 2P^2 \cos 2\vartheta + \cdots + 2P^n \cos n\vartheta + \cdots \tag{10}$$

$$Y^0(R) = Q^0 + 2Q^1 \cos\vartheta + 2Q^2 \cos 2\vartheta + \cdots + 2Q^n \cos n\vartheta + \cdots \tag{11}$$

Eine convergente Entwicklung dieser Art muss bei der Function $J^0(R)$ unter allen Umständen existiren, weil sie stetig bleibt für alle Werthe von R. Die Function $Y^0(R)$ hingegen wird unendlich gross, sobald R verschwindet, und wird daher durch eine convergente Entwicklung der genannten Art mit Sicherheit nur dann darstellbar sein, wenn ihr Argument R, in Folge verschiedener Werthe von r und r_1, zu verschwinden ausser Stande ist, trotz beliebig variirendem ϑ. Wir werden daher, was die Entwicklung (10) anbelangt, r und r_1 *ganz beliebig* lassen; was die Entwicklung (11) aber anbelangt, voraussetzen, dass *r kleiner als r_1* ist.

Durch Substitution der Entwicklungen (10), (9) in die Differential-Gleichung (8) ergeben sich Gleichungen zur Bestimmung von P^n, Q^n. Und zwar erhält man für beide, für P^n und Q^n ein und dieselbe Gleichung, nämlich folgende:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} F + F = 0, \tag{12}$$

Andererseits führt die Differential-Gleichung (9) zu dem Resultat, dass die beiden Functionen P^n und Q^n auch Genüge leisten müssen der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial F}{\partial r_1} - \frac{n^2}{r_1^2} F + F = 0. \tag{13}$$

Diese Gleichungen (12), (13) sind aber dieselben, welche wir früher (Seite 53) behandelt haben; die particulären Lösungen der einen sind repräsentirt durch die Functionen $J^n(r)$, $Y^n(r)$, die der andern durch die Functionen $J^n(r_1)$, $Y^n(r_1)$.

Aus (12) ergiebt sich daher, dass P^n, Q^n folgende Form besitzen müssen:

$$(14)\qquad \begin{aligned} P^n &= AJ^n(r) + BY^n(r), \\ Q^n &= CJ^n(r) + DY^n(r), \end{aligned}$$

wo A, B, C, D nur noch von r_1 abhängen können.

Die bei den Entwicklungen (10), (11) nothwendig gewordene Voraussetzung in Betreff der Werthe von r und r_1 hindert nicht, dass $r = 0$ wird sowohl in (10) als auch in (11).

Beachtet man nun, dass die zu entwickelnden Ausdrücke (10), (11), nämlich $J^0(R)$, $Y^0(R)$ für $r = 0$ stetig bleiben, dass also die für $r = 0$ ins Unendliche aufspringende Function $Y^n(r)$ in ihren Entwicklungen nicht enthalten sein kann, so reduciren sich die in (14) für P^n, Q^n gefundenen Formeln sofort auf:

$$(15)\qquad \begin{aligned} P^n &= AJ^n(r), \\ Q^n &= CJ^n(r), \end{aligned}$$

wo A, C unbekannte Functionen von r_1 sind.

Die Grössen P^n, Q^n müssen aber andererseits auch der Gleichung (13) Genüge leisten. Hieraus folgt:

$$(16)\qquad \begin{aligned} A &= \alpha\, J^n(r_1) + \beta\, Y^n(r_1), \\ C &= \gamma\, J^n(r_1) + \delta\, Y^n(r_1), \end{aligned}$$

wo α, β, γ, δ unbekannte Constante sind.

Aus (15), (16) folgt, wenn man zur genaueren Bezeichnung α_n, β_n, γ_n, δ_n statt α, β, γ, δ setzt:

$$(17)\qquad \begin{aligned} P^n &= J^n(r)\,[\alpha_n\, J^n(r_1) + \beta_n\, Y^n(r_1)], \\ Q^n &= J^n(r)\,[\gamma_n\, J^n(r_1) + \delta_n\, Y^n(r_1)]. \end{aligned}$$

Dividirt man diese Formeln (17) durch r^n, so erhält man rechts den Quotienten

$$\frac{J^n(r)}{r^n}$$

an Stelle von $J^n(r)$ selber. Dieser Quotient hat aber (Seite 5) den Werth:

$$\frac{J^n(r)}{r^n} = \frac{1}{2\cdot 4\cdots 2n}\left(1 - \frac{r^2}{2\cdot \overline{2n+2}} + \frac{r^4}{2\cdot 4\cdot \overline{2n+2}\cdot \overline{2n+4}} - \cdots\right),$$

und verwandelt sich daher für $r = 0$ in

$$\frac{1}{2\cdot4\cdots2n}$$

Somit ergiebt sich:

$$(18)\quad \begin{aligned} \left(\frac{P^n}{r^n}\right)_0 &= \frac{\alpha_n J^n(r_1) + \beta_n Y^n(r_1)}{2\cdot4\cdots2n}, \\ \left(\frac{Q^n}{r^n}\right)_0 &= \frac{\gamma_n J^n(r_1) + \delta_n Y^n(r_1)}{2\cdot4\cdots2n}, \end{aligned}$$

wo der Index 0 andeutet, dass $r = 0$ zu setzen ist.

Wir schreiben die Formeln (17) und (18) zur Abkürzung in folgender Weise:

$$(19)\quad \begin{aligned} P^n &= J^n(r)\cdot\varphi^n(r_1), \\ Q^n &= J^n(r)\cdot\psi^n(r_1), \end{aligned}$$

$$(20)\quad \begin{aligned} \left(\frac{P^n}{r^n}\right)_0 &= \frac{\varphi^n(r_1)}{2\cdot4\cdots2n}, \\ \left(\frac{Q^n}{r^n}\right)_0 &= \frac{\psi^n(r_1)}{2\cdot4\cdots2n}; \end{aligned}$$

Es handelt sich nun um die vollständige Bestimmung der Functionen $\varphi^n(r_1)$ und $\psi^n(r_1)$, d. i. um die Auffindung der in ihnen vorhandenen constanten Coefficienten α_n, β_n, γ_n, δ_n.

Die Lösung dieser Aufgabe (welche bei directem Angriff auf sehr langwierige Rechnungen führt), wird äusserst leicht und einfach durch Anwendung eines von Jacobi aufgestellten Satzes.*) Ist F irgend eine Function von $\cos\vartheta$, so gilt nach jenem Satz die Formel:

$$(21)\quad \int_0^\pi F\cdot\cos n\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{1\cdot3\cdots2n-1}\int_0^\pi \frac{\partial^n F}{(\partial\cos\vartheta)^n}\sin^{2n}\vartheta\, d\vartheta.$$

Nehmen wir statt F die erste der von uns zu entwickelnden Functionen, setzen wir also

$$F = J^0(R),$$

so wird (mit Rücksicht auf 7):

---

*) Crelle's Journal. Bd. 15. Seite 3 und 5.

$$\frac{\partial F}{\partial \cos\vartheta} = \frac{\partial J^0(R)}{\partial R^2}\,\frac{\partial R^2}{\partial \cos\vartheta} = \frac{\partial J^0(R)}{\partial R^2}\cdot(-2rr_1)$$

$$\frac{\partial^2 F}{(\partial \cos\vartheta)^2} = \frac{\partial^2 J^r(R)}{(\partial R^2)^2}\cdot(-2rr_1)^2,$$

$$\frac{\partial^3 F}{(\partial \cos\vartheta)^3} = \frac{\partial^3 J^0(R)}{(\partial R^2)^3}\cdot(-2rr_1)^3, \tag{22}$$

. . . .

$$\frac{\partial^n F}{(\partial \cos\vartheta)^n} = \frac{\partial^n J^0(R)}{(\partial R^2)^n}\cdot(-2rr_1)^n.$$

Wir erhalten somit an Stelle von (21) die Formel:

$$\int_0^\pi J^0(R)\cos n\vartheta\, d\vartheta = \frac{(-2rr_1)^n}{1\cdot3\cdots2n-1}\int_0^\pi \frac{\partial^n J^0(R)}{(\partial R^2)^n}\sin^{2n}\vartheta\, d\vartheta, \tag{23}$$

deren linke Seite (zufolge 10) identisch ist mit πP^n. Dividiren wir daher die Formel mit πr^n, so ergiebt sich:

$$\frac{P^n}{r^n} = \frac{(-2r_1)^n}{1\cdot3\cdots2n-1}\;\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial^n J^0(R)}{(\partial R^2)^n}\sin^{2n}\vartheta\, d\vartheta. \tag{24}$$

Setzen wir jetzt $r = 0$, so verwandelt sich die linke Seite (nach 20) in die zu bestimmende Function $\frac{\varphi^n(r_1)}{2\cdot4\cdots2n}$, während gleichzeitig auf der rechten Seite die Grösse R in r_1 übergeht. Wir erhalten also:

$$\frac{\varphi^n(r_1)}{2\cdot4\cdots2n} = \frac{(-2r_1)^n}{1\cdot3\cdots2n-1}\;\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial^n J^0(r_1)}{(\partial r_1^2)^n}\sin^{2n}\vartheta\, d\vartheta, \tag{25}$$

wo gegenwärtig der unter dem Integral befindliche Differential-Quotient unabhängig ist von ϑ. Mit Rücksicht auf die bekannte Formel:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^{2n}\vartheta\, d\vartheta = \frac{1\cdot3\cdots2n-1}{2\cdot4\cdots2n}$$

erhalten wir also schliesslich:

$$\varphi^n(r_1) = (-2r_1)^n\,\frac{\partial^n J^0(r_1)}{(\partial r_1^2)^n}. \tag{26}$$

In genau derselben Weise würde sich, wie leicht zu übersehen, bei Anwendung der Jacobi'schen Formel auf die zweite zu entwickelnde Function $Y^0(R)$ ergeben haben:

$$\psi^n(r_1) = (-2r_1)^n \frac{\partial^n Y^0(r_1)}{\partial(r_1^2)^n}. \tag{27}$$

Hierdurch sind die Functionen φ^n, ψ^n vollständig bestimmt. Die gefundenen Werthe können aber bedeutend vereinfacht, nämlich durch Anwendung früherer Formeln (Seite 54) augenblicklich in folgende Gestalt versetzt werden:

$$\begin{aligned} \varphi^n(r_1) &= J^n(r_1), \\ \psi^n(r_1) &= Y^n(r_1). \end{aligned} \tag{28}$$

Somit wird (nach 19):

$$\begin{aligned} P^n &= J^n(r)\, J^n(r_1), \\ Q^n &= J^n(r)\, Y^n(r_1). \end{aligned} \tag{29}$$

In Bezug auf die vorhin gefundenen Ausdrücke (17) würde also zu bemerken sein, dass durch unsere Untersuchung für die dortigen Coefficienten α_n, β_n, γ_n, δ_n folgende Werthe sich herausgestellt haben:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 1, & \beta_n &= 0, \\ \gamma_n &= 0, & \delta_n &= 1. \end{aligned} \tag{30}$$

Durch Substitution der Werthe (29) in die Entwicklungen (10), (11) gelangen wir zu folgendem Satz.

Setzt man $R = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\vartheta}$, und entwickelt man die Ausdrücke $J^0(R)$, $Y^0(R)$ nach den Cosinus der Vielfachen von ϑ, so entstehen die einfachen Formeln:

$$J^0(R) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n J^n(r) J^n(r_1) \cos n\vartheta, \tag{31}$$

$$Y^0(R) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n J^n(r) Y^n(r_1) \cos n\vartheta, \tag{32}$$

wo die Constante ε_n den Werth 1 besitzt für $n = 0$, und den Werth 2 für $n > 0$.

Die erste Entwicklung ist gültig für beliebige Werthe von r und r_1, die zweite nur dann, wenn r kleiner als r_1 ist.

§ 23. Die Entwicklung der Bessel'schen Function J^0 für ein Argument, welches die Entfernung zweier Puncte vorstellt.

Diese schon in (31) gefundene Entwicklung kann auf directerem Wege erhalten werden.

Es seien R, P, Q, k gegebene Constanten, welche zu einander in der Beziehung stehen:

$$R \cos k = P,$$

$$(1) \qquad R \sin k = Q,$$

$$R^2 = P^2 + Q^2.$$

Die Bessel'sche Function $J^0(R)$ wird (Seite 6) ausgedrückt durch das bestimmte Integral

$$(2) \qquad J^0(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos (R \sin \omega)\, d\omega.$$

Der Ausdruck $\cos (R \sin \omega)$ nimmt für das Intervall:

$$\omega = 0 \cdots\cdots k$$

Schritt für Schritt dieselben Werthe an, wie für das Intervall:

$$\omega = \pi \cdots\cdots \pi + k.$$

Demnach wird das Integral $\int \cos (R \sin \omega)\, d\omega$, mag dasselbe nun von 0 bis π, oder mag es von k bis $\pi + k$ hinerstreckt werden, in beiden Fällen denselben Werth haben. D. h. es ist:

$$\int_0^\pi \cos (R \sin \omega)\, d\omega = \int_0^\pi \cos \Big(R \sin (k + \omega)\Big)\, d\omega.$$

Somit können wir statt (2) auch schreiben:

$$(3) \qquad J^0(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \Big(R \sin (k + \omega)\Big)\, d\omega.$$

oder:

$$(4) \qquad J^0(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \Big(R \cos k \sin \omega + R \sin k \cos \omega\Big)\, d\omega,$$

oder mit Rücksicht auf (1):

$$(5.\,a) \qquad J^0(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \Big(P \sin \omega + Q \cos \omega\Big)\, d\omega.$$

Diese Formel wird also stattfinden für je drei Grössen R, P, Q, welche mit einander verbunden sind durch die Relation $R^2 = P^2 + Q^2$. Sie wird daher, ebenso gut wie für R, P, Q, auch stattfinden für R, P, $-Q$. Also:

(5.*b*) $$J^0(R) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(P \sin\omega - Q \cos\omega\right) d\omega.$$

Aus (5.*a*, *b*) folgt durch Addition:

(5.*c*) $$J^0(R) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(P \sin\omega)\cos(Q\cos\omega)\, d\omega,$$

und andererseits durch Subtraction:

(5.*d*) $$0 = \int_0^\pi \sin(P\sin\omega)\sin(Q\cos\omega)\, d\omega.$$

So haben wir hier vier Formeln (5. *a*, *b*, *c*, *d*) gefunden, welche gültig sind für irgend drei (reelle) Grössen R, P, Q, zwischen denen die Relation stattfindet $R^2 = P^2 + Q^2$.

Es sei nun R die Entfernung zweier beliebig gegebenen Puncte, nämlich ebenso wie früher:

$$R^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\vartheta,$$

oder was dasselbe ist:

(6) $$R^2 = (r - r_1\cos\vartheta)^2 + (r_1\sin\vartheta)^2.$$

Auf dieses R können wir unsere vier Formeln sofort in Anwendung bringen, wenn wir für P und Q diejenigen Grössen nehmen, deren Quadratsumme in (6) auf der rechten Seite steht. Die Anwendung der Formel (5. *b*) liefert alsdann:

(7) $$J^0(R) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left((r - r_1\cos\vartheta)\sin\omega - r_1\sin\vartheta\cos\omega\right) d\omega,$$

oder, was dasselbe ist:

(8) $$J^0(R) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(r\sin\omega - r_1\sin(\omega + \vartheta)\right) d\omega.$$

Nun ist nach früher gefundenen Entwicklungen (Seite 7):

(9.*a*) $$\cos(r\sin\omega) = \varepsilon_0 J^0(r) + \varepsilon_2 J^2(r)\cos 2\omega + \varepsilon_4 J^4(r)\cos 4\omega + \cdots\cdots,$$

(9.*b*) $$\sin(r\sin\omega) = \varepsilon_1 J^1(r)\sin\omega + \varepsilon_3 J^3(r)\sin 3\omega + \varepsilon_5 J^5(r)\sin 5\omega + \cdots\cdots,$$

wo ε_n jene oft benutzte Constante vorstellt, welche $= 1$ oder

$= 2$ ist, jenachdem $n = 0$ oder > 0. Diese Formeln (9) mögen zur Abkürzung so geschrieben werden:

$$(10.a)\qquad \cos(r \sin \omega) = \Sigma\, \varepsilon_p\, J^p(r) \cos p\omega,$$

$$(10.b)\qquad \sin(r \sin \omega) = \Sigma\, \varepsilon_q\, J^q(r) \sin q\omega,$$

wo die eine Summation über die **graden** Zahlen $p = 0, 2, 4, \ldots \infty$, die andere über die **ungeraden** Zahlen $q = 1, 3, 5 \ldots \infty$ hinerstreckt zu denken ist. Vertauscht man in diesen Formeln die Grössen r, ω mit r_1, $\omega + \vartheta$, so erhält man die analogen Formeln:

$$(11.a)\qquad \cos[r_1 \sin(\omega + \vartheta)] = \Sigma\, \varepsilon_p J^p(r_1) \cos p\,(\omega + \vartheta),$$

$$(11.b)\qquad \sin[r_1 \sin(\omega + \vartheta)] = \Sigma\, \varepsilon_q J^q(r_1) \sin q\,(\omega + \vartheta).$$

Für **jede beliebige** unter den mit p bezeichneten Zahlen findet, wie leicht zu übersehen, die Gleichung statt:

$$(12.a)\qquad \varepsilon_p \cdot \int_0^\pi \cos p\omega \cdot \cos p\,(\omega + \vartheta)\, d\omega = \pi \cos p\vartheta.$$

Ebenso ist andererseits für **jede** der mit q bezeichneten Zahlen:

$$(12.b)\qquad \varepsilon_q \cdot \int_0^\pi \sin q\omega \cdot \sin q\,(\omega + \vartheta)\, d\omega = \pi \cos q\vartheta.$$

Multiplicirt man nun die beiden Formeln (10.a), (11.a) miteinander, und integrirt man dieses Product nach ω zwischen den Grenzen 0 und π, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (12.a):

$$(13.a)\qquad \int_0^\pi \cos(r \sin \omega) \cdot \cos[r_1 \sin(\omega + \vartheta)]\, d\omega$$
$$= \pi \Sigma\, \varepsilon_p\, J^p(r)\, J^p(r_1) \cos p\vartheta.$$

In ähnlicher Weise folgt aus (10.b), (11.b) und (12.b):

$$(13.b)\qquad \int_0^\pi \sin(r \sin \omega) \cdot \sin[r_1 \sin(\omega + \vartheta)]\, d\omega$$
$$= \pi \Sigma\, \varepsilon_q\, J^q(r)\, J^q(r_1) \cos q\vartheta.$$

Die Addition der beiden letzten Formeln liefert:

$$(14)\qquad \int_0^\pi \cos[r \sin \omega - r_1 \sin(\omega + \vartheta)]\, d\omega$$
$$= \pi \Sigma\, \varepsilon_n\, J^n(r)\, J^n(r_1) \cos n\vartheta,$$

wo gegenwärtig die Summation Σ hinzuerstrecken ist über

sämmtliche (gerade und ungerade) Zahlen, also hinzuerstrecken über $n = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots \infty$.

Durch Anwendung von (14) auf die Formel (8) erhalten wir nun endlich die verlangte Entwicklung:

$$J^0(R) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \, J^n(r) \, J^n(r_1) \cos n\vartheta, \tag{15}$$

eine Entwicklung, welche genau übereinstimmt mit derjenigen, die wir früher bereits (Seite 65) auf ganz anderem Wege gefunden haben.

Diese Entwicklung (15) führt, wie wir hier noch zeigen wollen, zu einer bemerkenswerthen neuen Eigenschaft der Functionen J. Setzt man in

$$R = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \vartheta}$$

die Grössen r, r_1 einander gleich (was für die Gültigkeit der Entwicklung von $J^0(R)$ ohne nachtheiligen Einfluss ist, Seite 65), so wird:

$$R = 2r \sin \frac{\vartheta}{2},$$

folglich durch Benutzung der Formel (15):

$$J^0\left(2r \sin \frac{\vartheta}{2}\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \, J^n(r) \, J^n(r) \cos n\vartheta. \tag{16}$$

Dieser Ausdruck (16) kann nun aber nach den Cosinus der Vielfachen von ϑ noch auf anderem Wege entwickelt werden. Setzt man nämlich in der allgemeinen Formel (Seite 6):

$$J^0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos (z \sin \omega) \, d\omega$$

$2r \sin \frac{\vartheta}{2}$ an Stelle von z, so wird:

$$J^0\left(2r \sin \frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \left(2r \sin \omega \sin \frac{\vartheta}{2}\right) d\omega. \tag{17}$$

Aus der Formel (9. a) folgt, wenn man daselbst $\frac{\vartheta}{2}$ für ω setzt:

$$\cos \left(r \sin \frac{\vartheta}{2}\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \, J^{2n}(r) \cos n\vartheta, \tag{18}$$

wo die Summation, ebenso wie in (16), über sämmtliche Zahlen $n = 0, 1, 2, 3, \cdots \infty$ hinläuft. An Stelle von ε_n müsste in (18) eigentlich stehen ε_{2n}. Zufolge der Bedeutung dieser Con-

stanten ε ist es aber (wie man leicht bemerkt) völlig gleichgültig, ob in (18) der Factor ε_n oder ε_{2n} unter das Summenzeichen gestellt wird.

Vertauscht man nun endlich in (18) die Grösse r mit $2r \sin \omega$, und substituirt man den alsdann für

$$\cos\left(2r \sin \omega \sin \frac{\vartheta}{2}\right)$$

sich ergebenden Werth in die Formel (17), so erhält man:

$$(19)\quad J^0\left(2r \sin \frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n J^{2n}(2r \sin\omega)\cdot \cos n\vartheta\right) d\omega.$$

Diese Formel repräsentirt, ebenso wie die Formel (16), eine Entwicklung, welche fortschreitet nach den Cosinus der Vielfachen von ϑ. Beide Entwicklungen müssen unter einander identisch sein. Hierans ergiebt sich die Gleichung:

$$(20)\qquad J^n(r)\, J^n(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi J^{2n}(2r \sin \omega)\, d\omega,$$

eine Gleichung, welche gültig ist für jedes beliebige Argument r, und in welcher eine merkwürdige Beziehung enthalten ist zwischen je zwei Bessel'schen Functionen vom Range n und vom Range $2n$.

§ 24. Erweiterung der Theorie des logarithmischen Potentiales.

Ist k eine gegebene Constante, und bezeichnet R nach wie vor die Entfernung zweier Puncte in der xyEbene, so stehen die Functionen

$$(1)\qquad J^0(R), \qquad Y^0(R)$$

zu der Differential-Gleichung

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + U = 0$$

in genau derselben Beziehung, in welcher die Functionen

$$(3)\qquad J^0(kR), \qquad Y^0(kR)$$

stehen zu der allgemeineren Gleichung

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 U = 0.$$

D. h. die Gleichung (4) wird durch jede der beiden Functionen

(3) erfüllt werden, sobald man das eine Ende von R als fest, das andere als einen beweglichen Punct x, y betrachtet.

Nimmt man statt der reellen Constanten k eine rein imaginäre Constante ik, so werden in gleicher Weise

(5) $$J^0(ikR), \qquad Y^0(ikR)$$

zwei Lösungen sein für die Differential-Gleichung.

(6) $$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - k^2 U = 0.$$

In Betreff dieser letzten Gleichung lässt sich nun durch die Minimal-Untersuchung des über eine beliebige Elementarfläche ausgedehnten Integrales

$$\iint \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(k\,U \right)^2 \right\} dx\,dy$$

folgender Satz nachweisen:

Für eine beliebig gegebene Elementarfläche existirt immer eine Function $U(x, y)$ oder U, welche sammt ihren ersten Ableitungen

(7) $$\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y}$$

innerhalb der Fläche stetig ist, welche ferner innerhalb der Fläche der Differential-Gleichung (6) Genüge leistet, und welche endlich am Rande der Fläche beliebig vorgeschriebene Werthe besitzt. *)

Auf Grund dieses Satzes ist es leicht, auf die Differential-Gleichung (6) diejenigen Untersuchungen zu übertragen, welche ich in einer früheren Abhandlung **) angestellt habe in Betreff der Gleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Führen wir die Bezeichnungen ein

(8) $$F(R) = J^0(ikR),$$
$$\Phi(R) = Y^0(ikR) - J^0(ikR) \cdot \log(ik),$$

so sind $F(R)$ und $\Phi(R)$ reelle Functionen von R, und zwar Functionen, von denen sich (beiläufig bemerkt) für $k = 0$ die

---

*) Solches gilt indessen nur für die Gleichung (6). Denn für die Gleichung (4) scheint ein analoger Satz nicht zu existiren. Vergl. eine Bemerkung von Helmholtz über ein analoges Problem im Raume. Borchardt's Journal. Bd. 57. Seite 24.

**) Borchardt's Journal. Bd. 59. Seite 335.

eine auf 1, die andere auf $\log l$ reduciren würde. Diese Functionen $F(R)$ und $\Phi(R)$ können, falls

$$R = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\vartheta}$$

gesetzt wird, nach den Cosinus der Vielfachen von ϑ in ganz ähnlicher Weise entwickelt werden, wie früher $J^0(R)$ und $Y^0(R)$ entwickelt wurden (Seite 65).

Denken wir uns nun eine Materie oder ein Fluidum, welches in der Ebene beliebig vertheilt werden kann, und von solcher Beschaffenheit, dass das Potential zweier Theilchen aufeinander gleich ist der ihrer Entfernung R entsprechenden Function $\Phi(R)$, multiplicirt mit dem Product ihrer Massen, so gelangen wir zu folgenden Sätzen:

Ist q ein Punct innerhalb einer gegebenen Elementarfläche, so kann die Randcurve der Fläche immer der Art mit Masse belegt werden, dass das Potential dieser Belegung für alle Puncte ausserhalb der Fläche identisch ist mit dem Potential einer in q concentrirten Masse 1.

Ist $H^{(q)}ds$ diejenige Masse, welche bei der genannten Belegung auf dem Element ds der Randcurve sich befindet, und ist U irgend eine Function, welche auf der Elementarfläche den Bedingungen (7) *entspricht, so wird diese Function im Puncte q einen Werth besitzen, welcher dargestellt ist durch*

$$U_q = \int U\, H^{(q)} ds,$$

die Integration hinerstreckt über den Rand der Fläche.

Eine solche Function U kann also, wenn ihre Randwerthe gegeben sind, durch Anwendung der vorstehenden Formel berechnet werden für jeden beliebigen Punct q, vorausgesetzt, dass man bekannt ist mit jener durch $H^{(q)}$ repräsentirten Randbelegung.

Entwickelt man die Functionen $F(R)$, $\Phi(R)$ in der vorhin angedeuteten Weise, so kann man diese Randbelegung leicht für den Fall bestimmen, dass die gegebene Elementarfläche ein Kreis ist. Zugleich gelangt man dabei zu einem einfachen Satz über das Potential einer gleichförmig mit Masse belegten Kreislinie. Man findet nämlich, dass dieses Potential auf Puncte innerhalb des Kreises $= A \cdot F(r)$; auf Puncte ausserhalb $= B \cdot \Phi(r)$ ist, wo r die Entfernung der Puncte vom Kreismittelpunct vorstellt, und A, B gewisse Constanten sind.

Polytechniker Arndt, Jüngling, Klien und Künzel. [VIII u. 72 S. mit 11 lithographierten Tafeln in 4. u. qu. Folio.] hoch 4. geh. n. 1 Thlr. 10 Ngr.

Müller, Dr. J. H. T., Oberschulrath etc., Beiträge zur Terminologie der Griechischen Mathematiker. gr. 8. 1860. geh. n. 8 Ngr.

„Es sind nur 2½ Druckbogen, welche der Verfasser unter dem Titel von Beiträgen veröffentlicht, aber wer den Inhalt prüft, wird über die Fülle erstaunen, welche in dem kleinen Raume zusammengedrängt ist u. s. w.“ [Zeitschrift für Mathematik 1860, 6. Heft.]

Neumann, Carl, ord. Professor in Tübingen, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Holzschnitten und einer lithographierten Tafel. gr. 8. geh. n. 3 Thlr. 20 Ngr.

Eine Darstellung der Theorie der Abel'schen Integrale, durch welche dieselbe auch denen verständlich wird, deren mathematische Kenntnisse noch gering sind. Der Student welcher sein erstes oder seine beiden ersten Semester einigermassen gut angewendet hat, soll durch dieses Buch in den Stand gesetzt werden, in das Innere jener schwierigen und bis jetzt fast vollständig unzugänglichen Theorie sofort und mit vollem Verständnis einzudringen.

——— das Dirichlet'sche Princip in seiner Anwendung auf die Riemann'schen Flächen. gr. 8. 1865. geh. n. 18 Ngr.

——— die Haupt- und Brenn-Puncte eines Linsen-Systemes. Elementare Darstellung der durch Gauss begründeten Theorie. gr. 8. 1866. geh. 15 Ngr.

Roch, Dr. G., de theoremate quodam circa functiones Abelianas. 4. geh. n. 6 Ngr.

Ruete, Dr. C. G. Th., Professor und Geh. Medicinalrath, das Stereoscop. Eine populäre Darstellung. Mit 20 stereoscopischen Bildern in einer Beilage. gr. 8. 1860. geh. n. 1 Thlr. 10 Ngr.

„Der Verfasser hat nicht blos das Wesen des Stereoscopes wie des stereoscopischen Sehens behandelt, sondern auch die psychologischen, physikalischen und physiologischen Vorbegriffe vorausgeschickt. Er hat die Erklärung der Erscheinungen durch Beispiele erläutert, und diese durch eine beigegebene Sammlung von stereoscopischen Bildern vermehrt. Das Werk ist ebenso wissenschaftlich als populär im wahren Sinne des Wortes geschrieben, und es ist nicht blos jedem Gebildeten, dem das Stereoscop zur Unterhaltung dient, sondern auch dem Psychologen, Physiker und Physiologen zum Studieren, dem Lehrer als Hilfsmittel, dem Finanzmann als Mittel zum Erkennen der Copien vom Originale und der falschen Werthpapiere von echten anzuempfehlen.“ [Lukas, in der „Zeitschrift für Stereoscopie“. II. Jahrgang, Nr. 19.]

Reiss, M., Beiträge zur Theorie der Determinanten. gr. 4. 1867. geh. 1 Thlr.

Salmon, George, analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Unter Mitwirkung des Verfassers deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler. Zweite umgearbeitete und verbesserte Auflage. gr. 8. 1866. geh. n. 4 Thlr.

„Es kann das Werk in der vorliegenden Form der aufmerksamen Beachtung aller Studierenden der Mathematik empfohlen werden, welche auf möglichst einfachem Wege Zugang zu den Resultaten der neueren Forschungen auf dem Gebiete der analytischen Geometrie erlangen wollen; dem Lehrer der Wissenschaft empfiehlt es sich, abgesehen von der vorzüglichen Methodik des Verfassers, welche in der deutschen Bearbeitung durchaus nicht beeinträchtigt ist, namentlich noch durch die grosse Menge von mehr als vierhundert grossentheils vollständig durchgeführten Aufgaben.“ [O. Fort, in der Zeitschrift für Mathematik 1861, 3. Heft.]

——— Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen. Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler. gr. 8. 1863. geh. n. 1 Thlr. 24 Ngr.

Diese deutsche Ausgabe von Rev. George Salmon's „Lessons introductory to the modern higher Algebra“ ist in einigen Punkten verändert, in andern erweitert und nach dem Stande der Entdeckungen vervollständigt worden. Der Theorie der symmetrischen Determinanten ist eine Vorlesung gewidmet, überhaupt die Determinantentheorie vielfach erweitert, namentlich auch die Zahl der Beispiele vermehrt worden. Diese Erweiterung steht in Verbindung mit der volländigeren Behandlung der Theorie der Jacobi'schen und derjenigen der Hesse'schen Determinante, welche als Beispiele für eine Form der Behandlung gegeben sind, die in analytischer Beziehung unleugbare Vorzüge vor derjenigen hat, durch die der Grundcharacter des Originals bestimmt ist. In der Uebersicht der Resultate der Theorie für die biquadratischen ternären Formen ist auf die schönen Untersuchungen von Clebsch Bezug genommen und ein kurzer Abriss der Resultate gegeben worden, welche die algebraische Theorie der binären und ternären Formen für die elliptischen Transcendenten ans Licht gebracht hat. — Das Buch schliesst sich in seiner Bedeutung für die mathematischen Studien dem vorhergehenden Werke desselben Verfassers würdig an.

Salmon, George, analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, ord. Professor der descriptiven Geometrie am Polytechnicum zu Prag. 2 Theile. gr. 8. 1863. 1865. geh. 5 Thlr. 14 Ngr.

Einzeln:

I. Theil: A. u. d. T.: Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes und die Theorie der Flächen zweiten Grades. Ein Lehrbuch für höhere Unterrichtsanstalten. gr. 8. geh. 1 Thlr. 24 Ngr.

II. Theil: A. u. d. T.: Analytische Geometrie der Curven im Raume und der algebraischen Flächen. gr. 8. geh. n. 3 Thlr. 20 Ngr.

„Die ausgezeichnete Begabung des Verfassers für die Darstellung analytisch-geometrischer Untersuchungen, als auch die Tüchtigkeit des Herrn Uebersetzers sind so anerkannt, dass es unnöthig erscheint, irgend etwas zur Empfehlung des vorliegenden Werkes hinzuzufügen.“
[Literar. Centralblatt, 1864, Nr. 38.]

Scheffler, Dr. Hermann, Herzogl. Braunschweig. Baurath, imaginäre Arbeit, eine Wirkung der Centrifugal- und Gyralkraft, mit Anwendungen auf die Theorie des Kreisels, des rollenden Rades, des Polytrops, des rotirenden Geschosses und des Tischrückens. Mit 23 in den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8. 1866. geh. 15 Ngr.

Schell, Dr. W., Professor der Mathematik in Marburg, allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung. Mit Holzschnitten. gr. 8. 1859. geh. n. 24 Ngr.

„Das vorliegende Werkchen kann allen denen, die sich mit der geometrischen Betrachtungsweise der wichtigen Theorie der doppelt gekrümmten Curven, sowie vieler anderer dazu gehöriger geometrischer Gebilde vertraut machen wollen, nur bestens empfohlen werden. Sie werden darin ein reiches Material für die Uebung in der geometrischen Anschauung und Verbindung vorfinden, das der Verfasser ihnen in klarer und gedrängter Darstellung vor Augen geführt. Wir können nur wünschen, dass derselbe dem wissenschaftlichen Publikum seine weiteren Untersuchungen über die hier behandelten Gegenstände in nicht ferner Zeit zur Kenntnis bringen möge.“
[Heidelberger Jahrbücher 1859, Nr. 38.]

Schmidt, Carl Heinrich, Professor an der polytechnischen Schule in Stuttgart, Lehrbuch der Spinnereimechanik. Mit einem Atlas von 13 lithograph. Tafeln. gr. 8. 1857. (Der Atlas quer-Folio). n. 3 Thlr.

Dieses Lehrbuch der Spinnereimechanik beschäftigt sich vorzugsweise mit dem theoretischen Theile des Spinnereifaches. Es zerfällt in vier Abtheilungen: **I. Flachs- und Wergspinnerei. II. Baumwollspinnerei. III. Schafwollspinnerei. IV. Bewegungsgesetze und Bewegungsmechanismen für die Aufwindung des Vorgarnes** — und hat ebensowohl in Gewerb- und anderen technischen Schulen, als auch unter den Praktikern des Spinnereifaches allgemeine Anerkennung und weite Verbreitung gefunden.

Schneitler, Dr. C. F., Civilingenieur, die Instrumente und Werkzeuge der höheren und niederen Meßkunst, sowie der geometrischen Zeichenkunst, ihre Theorie, Construction, Gebrauch und Prüfung. Mit 236 in den Text gedruckten Holzschnitten. Vierte sehr verbesserte und vermehrte Auflage. gr. 8. 1861. geh. 1 Thlr. 15 Ngr.

——— Lehrbuch der gesammten Meßkunst oder Darstellung der Theorie und Praxis des Feldmessens, Nivellirens und Höhenmessens, der militärischen Aufnahmen ganzer Länder, sowie der geometrischen Zeichenkunst. Zum Selbststudium und Unterrichte bearbeitet. Dritte verbesserte Auflage. Mit 225 Holzschnitten. gr. 8. 1861. geh. 2 Thlr.

Die geodätischen Werke Schneitler's entsprechen so sehr einem praktischen Bedürfnisse, dass ihre Verbreitung in fortwährendem Steigen begriffen ist. Die vorliegende dritte Auflage des „Lehrbuchs der Messkunst“, welches mit dem gleichzeitig in vierter Auflage erschienenen Werke: **„die Instrumente und Werkzeuge der Messkunst“** ein Ganzes bildet, ist eine wesentlich verbesserte. Insbesondere ist der ganze Abschnitt „Nivelliren“ durch Herrn Regierungsconducteur Stocken in Breslau vollständig neu bearbeitet und damit das Buch gerade in einer Partie erweitert worden, deren genaue Kenntnis in unserer Zeit von besonderer Bedeutung für die grossartigen Landes-Meliorationen (Bruch- und Moorbauten, Drain-Anlagen) ist. Der Preis ist ausserordentlich billig.

Schneitler, Dr. C. F., und Julius Andrée, Civilingenieurs, Sammlung von Werkzeichnungen landwirthschaftlicher

Maschinen und Geräthe nebst ausführlichen Beschreibungen. 7 Hefte. Mit 42 Tafeln in gr. Royal-Fol. Text in 4. 1853—1857. geh. n. 38 Thlr.

Einzeln:

I. Heft, die Drainröhren- und Ziegelpressen auf 7 Foliotafeln: 1) Randell und Sanders Thonröhrenpresse mit mechanischer Abschneide-Vorrichtung; 2) Drainröhrenpresse von Egells in Berlin; 3) Doppeltwirkende Drainröhrenpresse von J. Whitehead in Preston; 4) Drainröhrenpresse von J. Williams in Bedford; 5) Doppelwirkende Drainröhrenpresse von Borie Frères in Paris; 6) Drainröhrenpresse von Mundscheid in Malapane; 7) einfache englische Röhrenpresse. 1853. n. 6 Thlr.
II. Heft, mit 6 Tafeln: 1) Verbesserte Flachs-Brechmaschine von Kuthe; 2) Flachsschwinge-Maschine von J. Bücklers; 3) Patentirter Apparat und Verfahren der Flachs-Dampfröste von Watt in Irland; 4) E. Kaemmerer's Universal-Säe-Maschine. 1853. n. 6 Thlr.
III. Heft, mit 6 Tafeln: 1) Transportabler Cylindergöpel von Barret, Exall u. Andrews in Reading; 2) transportables deutsches Rosswerk; 3) Häckselschneide-Maschine nach Gillet; Schrotmühle mit Stahlwalzen. 1854. n. 6 Thlr.
IV. Heft oder II. Serie 1. Heft, mit 6 Tafeln: 1) Englische Dreschmaschine; 2) Salmon's Häckselschneide-Maschine; 3) Bedford-Eggen. 1855. n. 6 Thlr.
V. Heft, oder II. Serie 2. Heft, mit 6 Tafeln: Thonschlemmerei zu Joachimsthal; Göpel von Pinet; Romaine's Dampfgrabe-Maschine. 1856. n. 6 Thlr.
VI. u. VII. (Doppel)Heft, oder II. Serie 3. u. 4. Heft, a. u. d. T.: Die neueren Dampfcultur-Geräthe und Dampfpflüge Englands. Von Dr. C. F. Schneitler. Mit 11 Tafeln. 1857. n. 8 Thlr.

Heft 1—3 herausgegeben von C. F. Schneitler, Heft 4—7 oder II. Serie 1—4. Heft von C. F. Schneitler und J. Andrée.

Schneitler, Dr. C. F., und Julius Andree, Civil-Ingenieurs, die neueren und wichtigeren landwirthschaftlichen Maschinen und Geräthe, ihre Theorie, Construction, Wirkungsweise und Anwendung. Ein Handbuch der landwirthschaftlichen Maschinen- und Gerätheknnde zum Selbststudium und Unterricht. Mit 350 in den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8. 1862. geh. 3 Thlr.

„Das neueste und vollständigste Buch über landwirthschaftliche Maschinen und Geräthe, welches durch seine vozüglich klaren und anschaulichen Abbildungen wie durch seinen gediegenen beschreibenden Text die vollste Anerkennung bei allen gefunden hat, die als Landwirthe oder Techniker mit den landwirthschaftlichen Maschinen und Geräthen sich näher bekannt zu machen Veranlassung haben. Wir können nur wiederholen, dass wir es hier mit einem gediegenen, der wärmsten Empfehlung werthen Werke zu thun haben. Alle Landwirthe, welche den Fortschritt in ihrem ehrenwerthen Berufe mit Freuden begrüssen, können „diese" Maschinen- und Geräthe- Kunde gar nicht entbehren, und legen wir besonders auch allen Mitgliedern unseres Vereins die Anschaffung desselben ans Herz."

[Landwirthschaftliche Mittheilungen (Neuhaldensleben) 1859, Nr. 4.]

Schrödter, J. G., faßliche Anleitung zum gründlichen Unterricht in der Algebra. Nach Beispielen aus den in Meier Hirsch's Sammlung enthaltenen Gleichungen und Aufgaben. gr. 8. 1850. geh. 1 Thlr. 9 Ngr.

Neben einer sehr klaren Darstellung der algebraischen Lehrsätze enthält das Buch ausführliche Auflösungen aller in Meyer Hirsch's Sammlung enthaltenen algebraischen Aufgaben, welche dasselbe vorzugsweise zum Selbstunterricht in der Algebra geeignet machen.

Stamm, Ernst, theoretische und praktische Studien über den Selfactor oder die selbstthätige Mule-Feinspinnmaschine. Aus dem Französischen übersetzt von Ernst Hartig. Mit einem Vorwort von Dr. J. A. Hülsse, Director der polytechnischen Schule in Dresden. Mit 10 Kupfertafeln (in qu.-Fol. u. Imp.-Fol.) I. Heft: Text. II. Heft: Kupfertafeln. gr. 4. 1862. geh. n. 4 Thlr.

Der Herr Verfasser vorliegender Schrift sprach gegen mich den Wunsch aus, dieselbe in Deutschland einzuführen; ich konnte diesem Wunsche um so bereitwilliger entsprechen, als die Schrift selbst für eine wesentliche Bereicherung der im Fache der Spinnereimechanik ohnehin nicht sehr zahlreichen Literatur zu erachten ist, und sich auf eine mechanische Vorrichtung erstreckt, welche mit jedem Tage grössere Bedeutung erhält und an deren Vervollkommnung und Nutzbarmachung für andere Spinnstoffe als Baumwolle auch deutsche Werkstätten sich wesentlich betheiligen, den Gegenstand selbst aber in einer Art behandelt, welche auch für den der höheren Mathematik nicht Kundigen ein Verständniss zulässt. Ich erlaube mir daher Alle, welche sich für das Spinnereifach interessieren, auf die in dieser Schrift enthaltenen neuen und eingehenden Betrachtungen über die Wirksamkeit der einzelnen Mechanismen des Selfactors und über die Mittel, durch welche einzelnen Fehlern in dem Producte des Selfactors abgeholfen werden kann, hinzuweisen

Dr. J. A. Hülsse in Dresden.

Steiner's, Jacob, Vorlesungen über synthetische Geometrie. 2 Bände.

I. Band: Synthetische Darstellung der Lehre von den Kegelschnitten, auf Grund eigener Nachschrift und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Steiner's bearbeitet von Dr. C. F. Geiser, Docent der Mathematik in Zürich. Mit vielen Holzschnitten. gr. 8. 1867. geh.

II. Band: Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektivische Eigenschaften. Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Jacob Steiner's bearbeitet von Dr. Heinrich Schröter, ordentl. Professor a. d. Universität zu Breslau. Mit vielen Holzschnitten. gr. 8. 1867. geh. 4 Thlr.

Vorlaender, I. I., Königl. Preuss. Cataster-Inspector und Steuerrath, Ausgleichung des Fehlers polygonometrischer Messungen. gr. Lex.-8. 1858. geh. 15 Ngr.

——— über die Berechnung der Flächen-Inhalte ganz oder überwiegend aus Originalmaassen. gr. Lex.-8. 1858. geh. n. 20 Ngr.

Weber, M. M. Freih. von, Ingenieur, Königl. Sächs. Eisenbahn-Director etc., die Technik des Eisenbahn-Betriebes in Bezug auf die Sicherheit desselben. gr. 8. 1854. geh. 1 Thlr. 15 Ngr.

Das vorliegende, von der Kritik einstimmig als jedem Techniker und Eisenbahnbeamten *unentbehrlich* bezeichnete Werk behandelt den technischen Eisenbahnbetrieb in Bezug auf die Sicherheit desselben in folgenden Hauptabtheilungen, deren jede wiederum in eine grosse Anzahl von Unterabtheilungen zerfällt, so dass nichts unerörtert bleibt, was nur irgend für den behandelten Gegenstand in Frage kommen kann, nämlich:

I. Wege und Werke. a. Oberbau. b. Unterbau. c. Bahnbewachung. d. die Stationen. **II. Betriebsmittel.** a. Locomotiven. b. Personenwagen. c. Güterwagen. **III. Bewachung. IV. Signale. V. VI. Böswilligkeit, Unregelmässigkeit, atmosphärische Einflüsse &c. VII. Assecuranzen.** Schlusswort.

——— die rauchfreie Verbrennung der Steinkohle, mit specieller Rücksicht auf C. J. Duméry's Erfindung. Mit 3 lith. Tafeln. gr. 8. 1859. geh. 18 Ngr.

Durch die Erfindung Duméry's ist ein lange angestrebtes Ziel, wenn auch vielleicht nicht vollständig erreicht, doch näher gerückt, als durch alle früheren Bemühungen. Die vorliegende Schrift beleuchtet die Duméry'schen Vorkehrungen zur rauchfreien Verbrennung der Steinkohlen und macht dieselben durch detaillierte Zeichnungen anschaulich.

——— die Lebensversicherung der Eisenbahn-Passagiere in Verbindung mit der Unterstützung und Pensionirung der Eisenbahn-Beamten und ihrer Angehörigen. gr. 8. 1855. geh. 12 Ngr.

Der Verfasser weist nach, mit welchen Mitteln die Eisenbahn-Verwaltungen ohne fühlbaren Druck auf das Publikum sich von der Sorge um die Beschaffung der Geldmittel für die Pensionierung und Unterstützung der Beamten, diese selbst aber von der schweren Last der Beisteuer zu den Unterstützungscassen befreien können.

——— die Gefährdungen des Personals beim Maschinen- und Fahrdienst der Eisenbahnen. Eine Denkschrift. gr. 8. 1862. geh. 12 Ngr.

Dieses Schriftchen ist speciell dem Wohle der Eisenbahn-Beamten und Arbeiter gewidmet. Die auf langjährige Erfahrung gestützten Vorschläge des rühmlichst bekannten Verfassers haben bereits vielseitige Berücksichtigung gefunden.

Wiener, Dr. Christian, Professor an der Polytechnischen Schule zu Carlsruhe, über Vielecke und Vielflache. [VIII u. 31 S. mit 3 lithographierten Tafeln.] gr. 4. geh. 24 Ngr.

Witzschel, Dr. Benjamin, Grundlinien der neueren Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der metrischen Verhältnisse an

Systemen von Punkten in einer Graden und einer Ebene. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8. 1857. geh. n. 2 Thlr.

Vorliegende Grundlinien der neueren Geometrie sind für den ersten Unterricht in diesem Zweige der Mathematik bestimmt und die ganz elementare Entwickelung des Gegenstandes dürfte in besonderen Fällen die Lehrer der Geometrie veranlassen, einige Partien oder Sätze der neueren Geometrie in den zeither üblichen Unterrichtscursus mit aufzunehmen. — Dass das Buch als eine vorzügliche Bereicherung der mathematischen Literatur angesehen werden muss, hat Herr Prof. Bretschneider in Gotha in einer ausführlichen Beurtheilung in der „Kritischen Zeitschrift für Chemie, Physik und Mathematik" Heft III, S. 258 ff. nachgewiesen.

Wüllner, Dr. **Adolph**, Director der Provinzialgewerbeschule zu Aachen, Lehrbuch der Experimentalphysik mit theilweiser Benutzung von Jamin's cours de physique de l'école polytechnique. Zwei Bände in vier Abtheilungen. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten und zwei Tafeln in lithographischem Farbendruck. Zweite unveränd. Auflage. gr. 8. 1866. geh. n. 11 Thlr. 20 Ngr.

Einzeln:

I. Bandes 1. Abth. **Mechanik und Akustik.** n. 2 Thlr. 16 Ngr.
I. » 2. Abth. **Optik.** n. 2 Thlr. 12 Ngr.
II. » 1. Abth. **Wärmelehre.** n. 2 Thlr. 12 Ngr.
II. » 2. Abth. **Die Lehre vom Magnetismus und der Electricität.** n. 4 Thlr. 10 Ngr.

Die wissenschaftlichen Vorzüge dieses neuen, elegant ausgestatteten Lehrbuchs der Physik sind von der Kritik einstimmig anerkannt worden. Dasselbe hat sich die Aufgabe gestellt, einerseits die physikalischen Lehren in weiteren Kreisen bekannt zu machen, andererseits denjenigen, welche tiefer in das Gebiet des physikalischen Wissens eindringen wollen, als Vorschule zu dienen, es hat aber, ohne den ersten Zweck ausser Acht zu lassen, die zweite wissenschaftliche Aufgabe mehr ins Auge gefasst, als dies von den verbreitetsten Lehrbüchern der Physik bis jetzt geschehen ist.

Die Verlagshandlung freut sich, ein Urtheil des Herrn Professor Jolly in München beifügen zu können, welcher sich folgendermassen über das Buch ausspricht:

„Das Lehrbuch der Physik von Wüllner ist eine sehr gelungene Arbeit, die sich, obschon es unserer Litteratur nicht an guten Lehrbüchern fehlt, dennoch rasch Bahn brechen wird. Im einleitenden Theil der Mechanik schliesst sich Wüllner noch vielfach an das Lehrbuch von Jamin an, sehr bald geht aber der Verfasser zu einer ganz selbstständigen Arbeit über, in welcher das Lehrbuch von Jamin nur soweit benutzt ist, als in demselben die Arbeiten französischer Physiker in grösserer Ausführlichkeit vorgetragen sind. Wüllner's Lehrbuch hat zunächst vor dem französischen Werke schon den Vorzug, dass in grosser Vollständigkeit auch die Arbeiten nicht französischer Forscher Berücksichtigung gefunden haben. Es hat aber zugleich in der Litteratur der Lehrbücher einen entscheidenden Vorzug dadurch, dass jedem Abschnitte und jedem Kapitel in kritischer Auswahl und Beleuchtung die Originalarbeiten, auf welche die Untersuchung sich stützt, speciell angegeben sind. Der in die Wissenschaft neu Eintretende wird hierdurch mit der laufenden Litteratur bekannt, er findet zugleich die Quellen angegeben, zu denen er zurückzugehen hat, wenn er im fortschreitenden Studium der Forschung sich widmen will. Beschränkt sich der Verfasser zunächst auf den Gebrauch der Elementarmathematik, so sind doch zugleich überall die Wege bezeichnet, die zum Verständnis der analytischen Behandlung führen, und die den Anfänger befähigen, sobald er die Sprache der höheren Mathematik sich angeeignet hat, mit Leichtigkeit den betreffenden monographischen Arbeiten zu folgen. Wäre der Ausdruck „eine literarische Erscheinung befriedige ein längst gefühltes Bedürfniss" nicht allzusehr verbraucht, so würde ich ihn über das Werk von Wüllner mit vollster Ueberzeugung gebrauchen." Jolly.

——— Einleitung in die Dioptrik des Auges. Mit 19 Figuren in Holzschnitt. gr. 8. 1866. geh. 24 Ngr.

Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben unter der verantwortlichen Redaction von Dr. O. Schlömilch, Dr. B. Witzschel, Dr. M. Cantor und Dr. E. Kahl. I—X. Jahrgang 1856—1867, 6 Hefte jährlich. gr. 8. geh. à Jahrgang n. 5 Thlr.

I.—III. Jahrgang, herausgegeben von O. Schlömilch und B. Witzschel.
IV. » » » denselben und M. Cantor.
V.—XI. » » » O. Schlömilch, E. Kahl und M. Cantor.

Zetsche, Dr. **Karl Ed.**, die Copirtelegraphen, die Typendrucktelegraphen und die Doppeltelegraphie. Ein Beitrag zur Geschichte der elektrischen Telegraphie. Mit 110 Holzschnitten. gr. 8. 1865. geh. n. 1 Thlr. 26 Ngr.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

STUDIEN

ÜBER DIE

BESSEL'SCHEN FUNCTIONEN.

VON

Dr. EUGEN LOMMEL,

PROFESSOR DER MATHEMATIK UND PHYSIK AN DER K. AKADEMIE FÜR LAND- UND FORSTWIRTHE IN HOHENHEIM.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1868.

Mittheilungen

der Verlagsbuchhandlung

B. G. Teubner in Leipzig.

Von 1868 ab erscheinen in zwanglosen Nummern „Mittheilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig", welche über die Verlagsunternehmungen dieser Firma ausführlich berichten und auf Verlangen gratis und franco regelmässig versandt werden.

Auszug aus No. 1—4.

I. Notizen über künftig erscheinende Bücher.

Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Von Arwed Fuhrmann. Assistent der Mathematik und Vermessungslehre an der Kgl. Polytechn. Schule zu Dresden. Zweiter Theil: Aufgaben aus der analytischen Geodynamik. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten. gr. 8.

Dieser zweite Theil wird Aufgaben aus allen wichtigeren Capiteln der analytischen Geodynamik enthalten und sich bezüglich der Darstellungsweise und Behandlung des Stoffes ganz dem ersten Theile anschliessen. Ueber die grosse Bedeutung dieser Aufgaben für das Studium der analytischen Mechanik spricht sich Herr Hofrath Dr. Schlömilch in einem dem ersten Theile beigefügten Vorworte ausführlich aus, dessen Schluss hier eine Stelle finden möge: 'Sowohl für Repetitionen als für das Selbststudium ist eine Aufgabensammlung ohne Zweifel ein willkommenes Hülfsmittel, und da in der That keine Sammlung von Aufgaben aus der analytischen Mechanik existirt, welche den Bedürfnissen der Studirenden an Universitäten und polytechnischen Instituten entspricht, so dürfte das vorliegende Buch wohl als eine zeitgemässe Erscheinung gelten. Der erste Theil desselben, welchem ein zweiter unverzüglich folgen wird, enthält nur Aufgaben aus der Statik fester Körper, wobei Probleme über die Elasticität und Festigkeit ausgeschlossen wurden, weil diese an polytechnischen Schulen in besonderen Vorlesungen ausführlich behandelt zu werden pflegen. Die meisten der mitgetheilten, für das erste Studium der analytischen Mechanik berechneten Aufgaben sind neu; Bekanntes ist selten und nur dann aufgenommen worden, wenn sich später eine Verweisung darauf nöthig machte. Bei schwereren Aufgaben findet man eine Andeutung über den Gang der Auflösung, bei leichteren ist nur das Resultat angegeben. Und damit sei diese anspruchslose, jedenfalls aber brauchbare Schrift den Lehrern und Jüngern der Wissenschaft bestens empfohlen.'

Beer's Einleitung in die Theorie der Elasticität und Capillarität. gr. 8.

Das genannte Werk, welches sich an die vor einigen Jahren erschienene „Einleitung in die Electrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Electrodynamik" desselben Verfassers anschliesst, stellt sich

STUDIEN

ÜBER DIE

BESSEL'SCHEN FUNCTIONEN.

VON

Dr. EUGEN LOMMEL,

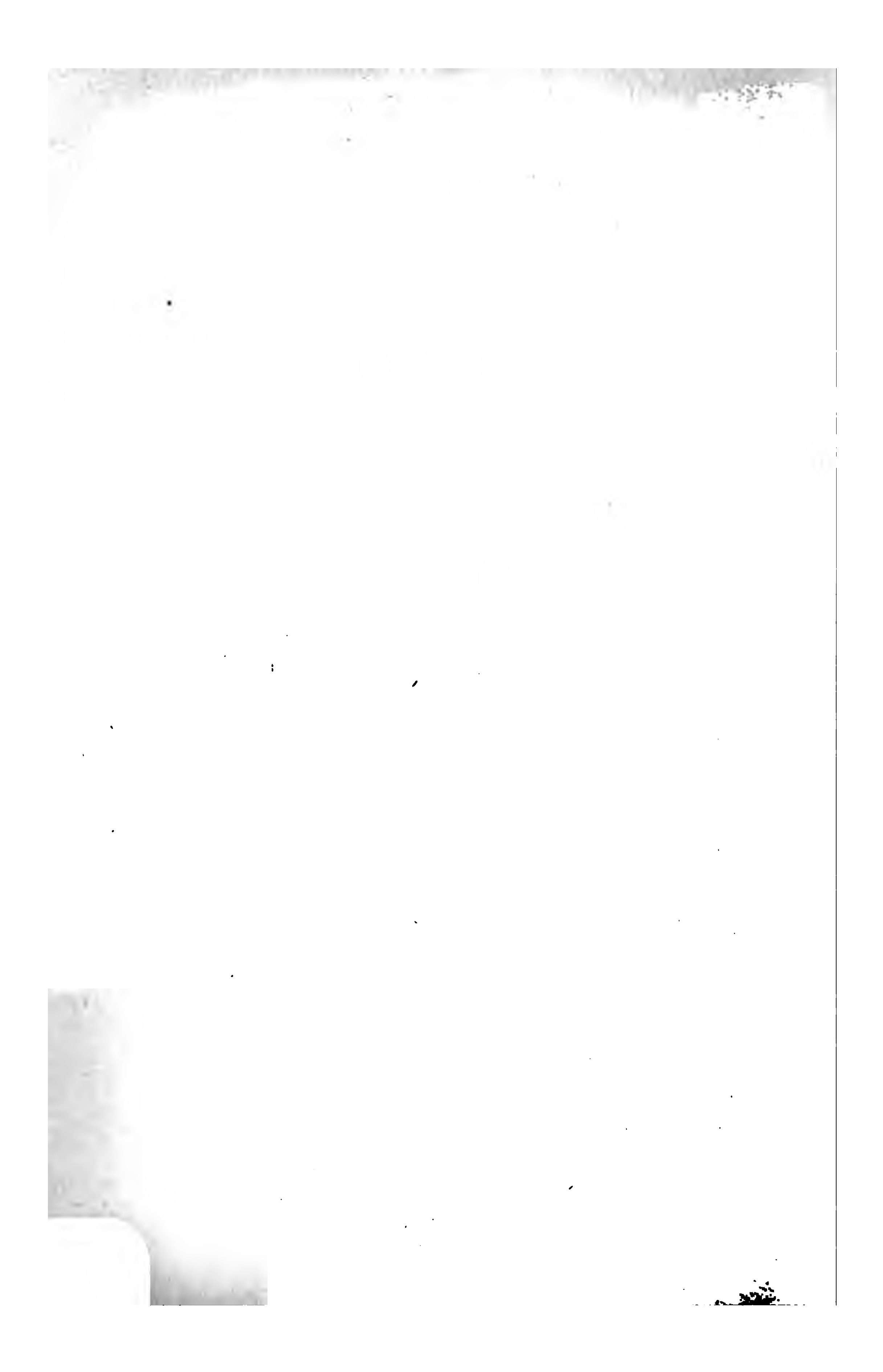
PROFESSOR DER MATHEMATIK UND PHYSIK AN DER K. AKADEMIE FÜR LAND- UND FORSTWIRTHE IN HOHENHEIM.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1868.



VORWORT.

Mathematisch-physikalische Studien führten den Verfasser vorliegenden Schriftchens mehrfach auf die Bessel'schen Functionen, und veranlassten ihn, sich mit denselben eingehender zu beschäftigen. Diese Transcendenten, theoretisch äusserst interessant, scheinen berufen, auch in den Anwendungen des Calculs eine immer wichtigere Rolle zu spielen; ja es dürfte kaum zu gewagt erscheinen, denselben in dieser Hinsicht gleich nach den goniometrischen Functionen ihren Platz anzuweisen.

Es liegt diesem Werkchen der Gedanke zu Grunde, die Eigenschaften der Bessel'schen Functionen in möglichst einfacher Weise aus drei Grundgleichungen herzuleiten. Dabei wird jede Function eine Bessel'sche genannt, welche je zweien dieser Grundgleichungen, aus denen die dritte unmittelbar folgt, Genüge leistet; da diese zwei Gleichungen äquivalent sind einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, so kann es nur zwei Arten Bessel'scher Functionen geben. Wir haben demnach eine Bessel'sche Function erster und eine Bessel'sche Function zweiter Art.

Diese Benennung weicht ab von der durch C. Neumann in seiner „Theorie der Bessel'schen Functionen"*) adoptirten, wo eine Function O, die zur Bessel'schen Transcendente I in einer ähnlichen Beziehung steht, wie die Kugelfunction Q zur Kugelfunction P, welche aber nach

---

*) C. Neumann: Theorie der Bessel'schen Functionen. Ein Analogon zur Theorie der Kugelfunctionen. Leipzig 1867.

unserer Definition keine Bessel'sche Function wäre, als Bessel'sche Function zweiter Art aufgeführt wird. Das erwähnte vortreffliche Werkchen von Neumann stellt überhaupt die Analogie der Bessel'schen mit den Kugelfunctionen in den Vordergrund. Bei dem ganz verschiedenen Wege, den das vorliegende Schriftchen verfolgt, schien es dagegen geboten, jene Analogie bei Seite zu lassen und die Benennungen aus der Natur der Bessel'schen Functionen selbst zu schöpfen. Das mathematische Publicum mag entscheiden, welcher Nomenclatur der Vorzug zu geben sei. —

Bisher wurden nur Bessel'sche Functionen mit (positiv oder negativ) ganzem Index betrachtet; der Verfasser glaubte auch solche mit (positiv oder negativ) gebrochenem Index einführen zu müssen. Diess gelang namentlich durch die Gleichung (V.), welche die Definition der Bessel'schen Functionen mit beliebig negativem Index enthält. Die Naturnothwendigkeit dieser Erweiterung tritt klar hervor im dritten Abschnitt bei der Integration linearer Differentialgleichungen.

Während die Bessel'schen Functionen mit negativ ganzem Index bis auf das Vorzeichen identisch sind mit denen von gleichhohem positiven Index, sind die mit negativ gebrochenem Index wesentlich verschieden von jenen mit gleichhohem positiven Index, und verhalten sich in Bezug auf die bereits erwähnten Differentialgleichungen zu den letzteren, wie Bessel'sche Functionen zweiter Art zu solchen erster Art.

Die Reihenentwickelungen der §§. 13—15 sind auf einem geradezu elementaren Wege aus den Grundgleichungen hergeleitet. Als Analoga zu diesen Reihen sind der Fourier'sche und der Schlömilch'sche Lehrsatz mit naheliegenden Erweiterungen beigefügt worden.

Der zweite Abschnitt behandelt die Bessel'schen Functionen zweiter Art, welche auf sehr einfachem Wege aus denen erster Art hergeleitet werden.

Im dritten Abschnitt endlich werden mehrere lineare Differentialgleichungen, darunter die bekannte Riccati'sche,



durch Bessel'sche Functionen auf eine einfache und völlig erschöpfende Weise integrirt.

Der Anhang enthält als eine vielleicht Manchem erwünschte Beigabe die von Hansen berechneten Tafeln der Bessel'schen Functionen erster Art.

Es war nicht meine Absicht, in dem vorliegenden Werkchen, welches ich hiermit der wohlwollenden Nachsicht der Leser empfehle, eine umfassende Theorie der Bessel'schen Functionen zu liefern; ich war jedoch bestrebt, die wichtigsten bisher über diese Transcendenten bekannt gewordenen Sätze in den hier befolgten Gedankengang einzuflechten und dadurch dem strebsamen Anfänger einen Leitfaden in die Hand zu geben, der es ihm möglich macht, in das Studium der für den Physiker und Astronomen so wichtigen Bessel'schen Functionen mit Leichtigkeit einzudringen.

Hohenheim, im April 1858.

Der Verfasser.

INHALTSVERZEICHNISS.

Erster Abschnitt.

Die Bessel'schen Functionen erster Art.

Zweiter Abschnitt.

Die Bessel'schen Functionen zweiter Art.

Dritter Abschnitt.

Lineare Differentialgleichungen, welche durch Bessel'sche Functionen integrirt werden.

Anhang.

Erster Abschnitt.

Die Bessel'schen Functionen erster Art.

§. 1. Reductionsformeln für $J^{\nu}_{(z)}$.

Die Bessel'sche Function $J^{\nu}_{(z)}$ sei definirt durch die Gleichung

$$(\text{I.})\qquad J^{\nu}_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\,.\,d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu}\omega\,.\,d\omega\,,$$

oder, was dasselbe ist, durch

$$J^{\nu}_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_{-1}^{+1} e^{izu}(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,.\,du\,,$$

wo das Argument z eine beliebige complexe Zahl bedeutet, der Index ν aber reell und grösser als $-\frac{1}{2}$ gedacht ist.

Um eine Reductionsformel zu erhalten, integriren wir theilweise, indem wir $e^{iz\cos\omega}\sin\omega$ als zu integrirenden Factor betrachten, und finden zunächst

$$\int e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu}\omega\,.\,d\omega =$$

$$-\sin^{2\nu-1}\omega\,.\,\frac{e^{iz\cos\omega}}{iz} + \frac{2\nu-1}{iz}\int e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu-2}\omega\,.\,\cos\omega\cdot d\omega\,,$$

folglich, wenn nur $\nu > \frac{1}{2}$ ist

$$\int_0^{\pi} e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu}\omega\,.\,d\omega = \frac{2\nu-1}{iz}\int_0^{\pi} e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu-2}\omega\,.\,\cos\omega\,.\,d\omega\,.$$

Durch nochmalige Anwendung desselben Verfahrens ergibt sich weiter

$$\int e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu-2}\omega\,.\cos\omega\,.\,d\omega = -\sin^{2\nu-3}\omega\,.\cos\omega\,.\frac{e^{iz\cos\omega}}{iz}$$
$$+\frac{1}{iz}\int e^{iz\cos\omega}\,d(\sin^{2\nu-3}\omega\,.\cos\omega),$$

also, wenn $\nu > \frac{3}{2}$ ist:

$$\int_0^\pi e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu-2}\omega\,.\cos\omega\,.\,d\omega$$

$$= -\frac{1}{iz}\int_0^\pi e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu-2}\omega\,.\,d\omega + \frac{2\nu-3}{iz}\int_0^\pi e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu-4}\omega\cos^2\omega\,.\,d\omega.$$

Setzt man diesen Werth oben ein, so kommt

$$\int_0^\pi e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu}\omega\,.\,d\omega = \frac{2\nu-1}{z^2}\int_0^\pi e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu-2}\omega\,.\,d\omega$$

$$-\frac{(2\nu-1)(2\nu-3)}{z^2}\int_0^\pi e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu-4}\omega\,.\cos^2\omega\,.\,d\omega$$

$$= \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)}{z^2}\int_0^\pi e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu-2}\omega\,.\,d\omega - \frac{(2\nu-1)(2\nu-3)}{z^2}\int_0^\pi e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu-4}\omega\,.\,d\omega.$$

Multiplicirt man hier beiderseits mit $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{z^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}$, so erhält man für die Bessel'sche Function $J^\nu_{(z)}$ folgende Reductionsformel:

(II.) $$J^\nu_{(z)} = \frac{2(\nu-1)}{z}J^{\nu-1}_{(z)} - J^{\nu-2}_{(z)}.$$

oder auch, wenn man $\nu+1$ statt ν schreibt:

(II. a) $$\frac{2\nu}{z}J^\nu_{(z)} = J^{\nu-1}_{(z)} + J^{\nu+1}_{(z)}.$$

Von diesen Gleichungen gilt die erstere, so lange $\nu > \frac{3}{2}$, die zweite, so lange $\nu > \frac{1}{2}$ ist. —

Mit Hilfe der Formel (II.) kann J^ν (wir lassen der Kürze wegen das Argument z weg) auf $J^{\nu-1}$ und $J^{\nu-2}$ reducirt werden. Drückt man alsdann mittelst der nämlichen Formel $J^{\nu-1}$ durch $J^{\nu-2}$ und $J^{\nu-3}$ aus, und setzt diesen Werth in (II.) ein, so erscheint jetzt J^ν auf $J^{\nu-2}$ und $J^{\nu-3}$ zurückgeführt. Durch m malige Wiederholung dieses Verfahrens kann schliesslich J^ν durch $J^{\nu-m}$

und $J^{\nu-m-1}$ ausgedrückt werden. Das Gesetz, nach welchem sich diese Reduction vollzieht, ist meines Wissens bis jetzt nicht bekannt gemacht worden. Dasselbe ist ausgesprochen in folgender Gleichung:

$$(1). \quad J^{\nu} = J^{\nu-m} \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2\nu-2m+2p)^{m-2p|2}}{z^{m-2p}}$$
$$- J^{\nu-m-1} \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2\nu-2m+2+2p)^{m-1-2p|2}}{z^{m-1-2p}},$$

wo die Ausdrücke hinter den Summenzeichen Σ die allgemeinen Glieder zweier endlichen Reihen vorstellen, deren einzelne Glieder daraus hervorgehen, wenn man statt des Buchstaben p nach und nach 0, 1, 2, ... und alle positiven ganzen Zahlen einsetzt; in der ersten Summe braucht man aber p nicht grösser als $\frac{m}{2}$ zu nehmen, weil für grössere Werthe von p der Factor $(m-p)^{p|-1}$ und damit alle folgenden Glieder der Reihe verschwinden; ebenso braucht in der zweiten Reihe p den Werth $\frac{m-1}{2}$ nicht zu übersteigen.

Die allgemeine Geltung der obigen Formel ist erwiesen, sobald gezeigt ist, dass dieselbe, wenn sie für irgend einen Werth von m zutrifft, auch noch für den nächstfolgenden Werth $m+1$ richtig ist. Man erhält aber aus (II.):

$$J^{\nu-m} = \frac{2(\nu-m-1)}{z} J^{\nu-m-1} - J^{\nu-m-2}.$$

Setzt man diesen Werth oben ein, so ergiebt sich zunächst

$$J^{\nu} = J^{\nu-m-1} \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2\nu-2m-2)(2\nu-2m+2p)^{m-2p|2}}{z^{m-2p+1}}$$
$$- J^{\nu-m-2} \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2\nu-2m+2p)^{m-2p|2}}{z^{m-2p}}$$
$$- J^{\nu-m-1} \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2\nu-2m+2+2p)^{m-1-2p|2}}{z^{m-1-2p}},$$

wo jetzt noch die zwei Summen, welche mit $J^{\nu-m-1}$ multiplicirt sind, in eine einzige zusammengefasst werden müssen. Sondert man zu dem Ende von der ersteren Summe das erste Glied ab, indem man zuerst 0, dann $p+1$ an die Stelle von p setzt, so geben beide zusammen:

$$\frac{(2\nu-2m-2)^{m+1|2}}{z^{m+1}} - \sum(-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p+1|-1}}{(p+1)!} \cdot \frac{(2\nu-2m-2)(2\nu-2m+2+2p)^{m-2-2p|2}}{z^{m-1-2p}}$$

$$- \sum(-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2\nu-2m+2+2p)^{m-1-2p|2}}{z^{m-1-2p}}$$

$$= \frac{(2\nu-2m-2)^{m+1|2}}{z^{m+1}}$$

$$- \sum(-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2\nu-2m+2+2p)^{m-2-2p|2}}{z^{m-1-2p}} \cdot \frac{(m-p)(2\nu-2m+2p)}{p+1}$$

$$= \frac{(2\nu-2m-2)^{m+1|2}}{z^{m+1}} + \sum(-1)^{p+1} \cdot \frac{(m-p)^{p+1|-1}}{(p+1)!} \cdot \frac{(2\nu-2m+2p)^{m-1-2p|2}}{z^{m-1-2p}}$$

$$= \sum(-1)^p \cdot \frac{(m+1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2\nu-2m-2+2p)^{m+1-2p|2}}{z^{m+1-2p}}.$$

Wir haben demnach gefunden

$$J^\nu = J^{\nu-m-1} \sum(-1)^p \cdot \frac{(m+1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2\nu-2m-2+2p)^{m+1-2p|2}}{z^{m+1-2p}}$$

$$- J^{\nu-m-2} \sum(-1)^p \cdot \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2\nu-2m+2p)^{m-2p|2}}{z^{m-2p}},$$

eine Formel, welche auch aus Gleichung (1.) hervorginge, wenn man daselbst $m+1$ statt m einsetzen würde. Ist daher jene Gleichung für irgend ein m richtig, so gilt sie allemal auch für $m+1$; ihre allgemeine Geltung ist demnach ausser Zweifel gesetzt, denn für $m=1$ geht sie in (II.) über.

Setzt man in (1.) $\nu = m+1$, so erhält man speciell für positiv ganze Indices:

$$(2).\quad J^{m+1} = J^1 \sum(-1)^p \cdot \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+2)^{m-2p|2}}{z^{m-2p}}$$

$$- J^0 \sum(-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+4)^{m-1-2p|2}}{z^{m-1-2p}}.$$

§. 2. Entwickelung des Quotienten $\frac{J^{\nu+1}_{(z)}}{J^{\nu}_{(z)}}$ in einen Kettenbruch.

Aus der Gleichung (II.) folgt, wenn man daselbst $\nu+2$ statt ν schreibt und dann durch $J^{\nu+1}_{(z)}$ dividirt:

$$\frac{J^{\nu+2}_{(z)}}{J^{\nu+1}_{(z)}} = \frac{2(\nu+1)}{z} - \frac{J^{\nu}_{(z)}}{J^{\nu+1}_{(z)}}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$Q^{\nu} = \frac{J_{(z)}^{\nu+1}}{J_{(z)}^{\nu}},$$

so heisst jetzt obige Gleichung

$$Q^{\nu+1} = \frac{2(\nu+1)}{z} - \frac{1}{Q^{\nu}},$$

woraus sofort

$$\text{(1.)} \qquad Q^{\nu} = \frac{z}{2(\nu+1) - z\,Q^{\nu+1}}$$

folgt. Durch fortgesetzte Anwendung dieser Relation erhält man den continuirlichen Bruch

$$Q^{\nu} = \cfrac{z}{2(\nu+1) - \cfrac{z^2}{2(\nu+2) - \cfrac{z^2}{2(\nu+3) - \ddots - \cfrac{z^2}{2(\nu+m) - z\,Q^{\nu+m}}}}}.$$

Da der Quotient Q^{ν} zweier Bessel'schen Functionen, deren Indices um die Einheit differiren, bei wachsendem Index offenbar verschwindet (wie aus dem blossen Anblick der Definition (I.) unmittelbar einleuchtet), so darf in vorstehendem Kettenbruch das Restglied $z\,Q^{\nu+m}$ weglassen und derselbe ins Unendliche fortgesetzt werden. Man hat alsdann mit Rücksicht auf die Bedeutung von Q^{ν}:

$$\text{(2.)} \qquad \frac{J_{(z)}^{\nu+1}}{J_{(z)}^{\nu}} = \cfrac{z}{2(\nu+1) - \cfrac{z^2}{2(\nu+2) - \cfrac{z^2}{2(\nu+3) - \dots}}}$$

Um den Quotienten $\frac{J^{\nu+2}}{J^{\nu}}$ zweier Bessel'schen Functionen, deren Indices um 2 verschieden sind, in einen Kettenbruch zu verwandeln, haben wir aus Gleichung (II.):

$$\frac{J_{(z)}^{\nu+2}}{J_{(z)}^{\nu}} = \frac{2(\nu+1)}{z} \cdot \frac{J_{(z)}^{\nu+1}}{J_{(z)}^{\nu}} - 1,$$

oder mit Benützung des vorstehenden Resultats

$$\text{(3).} \qquad \frac{J_{(z)}^{\nu+2}}{J_{(z)}^{\nu}} = -1 + \cfrac{2(\nu+1)}{2(\nu+1) - \cfrac{z^2}{2(\nu+2) - \cfrac{z^2}{2(\nu+3) - \dots}}}$$

Mittelst dieser Formeln (2.) und (3.) könnte man $J^{\nu+1}$ und $J^{\nu+2}$ berechnen, wenn J^{ν} bekannt wäre.

§. 3. Differentialeigenschaften von $J^{\nu}_{(z)}$.

In der Gleichung (II.) ist eine Grundeigenschaft der Function $J^{\nu}_{(z)}$ ausgesprochen. Zwei andere wichtige Gesetze ergeben sich leichter und einfacher, wenn wir statt der Function $J^{\nu}_{(z)}$ die andere $z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$ betrachten. Bezeichnen wir der Kürze wegen den Factor $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}$ einstweilen mit K, so erhalten wir durch Differentiation nach z:

$$\frac{\partial\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z} = \frac{iK}{2\sqrt{z}} \int_0^{\pi} e^{i\sqrt{z}\cos\omega} \sin^{2\nu}\omega \,.\, \cos\omega \,.\, d\omega$$

$$= \frac{iK}{2(2\nu+1)\sqrt{z}} \left[e^{i\sqrt{z}\cos\omega} \sin^{2\nu+1}\omega \right]_0^{\pi} - \frac{K}{2(2\nu+1)} \int_0^{\pi} e^{i\sqrt{z}\cos\omega} \sin^{2\nu+2}\omega \,.\, d\omega,$$

oder, weil das vom Integralzeichen befreite Glied für $\nu > -\frac{1}{2}$ verschwindet:

$$\frac{\partial\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z} = -\frac{K}{2(2\nu+1)} \int_0^{\pi} e^{i\sqrt{z}\cos\omega} \sin^{2\nu+2}\omega \,.\, d\omega.$$

Bedenkt man nun die Bedeutung von K, so hat man die Gleichung:

(III.) $$\frac{\partial\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z} = -\frac{1}{2} z^{-\frac{\nu+1}{2}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{z})}$$

und daraus durch $(m-1)$malige Differentiation:

(III. a.) $$\frac{\partial^m\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{-\frac{\nu+m}{2}} J^{\nu+m}_{(\sqrt{z})}.$$

Um daher die Function $z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$ $m$mal nach z zu differentiiren, braucht man nur den Index ν um m zu erhöhen, und den Factor $(-\frac{1}{2})^m$ beizufügen. Dieser Satz gilt vorläufig für jedes $\nu > -\frac{1}{2}$.

Wendet man die Gleichungen (II.) und (III.) auf die Differentiation der Function $z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$ an, so gelangt man zu einem weiteren bemerkenswerthen Satze. Es ist nämlich mit Anwendung von (III.):

$$\frac{\partial\left(z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z} = \frac{\partial\left(z^{\nu} z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z}$$

$$= -\tfrac{1}{2} z^{\frac{\nu-1}{2}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{z})} + \nu z^{\frac{\nu-2}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}.$$

Nach (II.) aber ist, so lange $\nu > \frac{1}{2}$:

$$J^{\nu+1}_{(\sqrt{z})} = \frac{2\nu}{\sqrt{z}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})} - J^{\nu-1}_{(\sqrt{z})},$$

folglich

$$-\tfrac{1}{2} z^{\frac{\nu-1}{2}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{z})} + \nu z^{\frac{\nu-2}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$$

$$= -\nu z^{\frac{\nu-2}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})} + \tfrac{1}{2} z^{\frac{\nu-1}{2}} J^{\nu-1}_{(\sqrt{z})} + \nu z^{\frac{\nu-2}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$$

$$= \tfrac{1}{2} z^{\frac{\nu-1}{2}} J^{\nu-1}_{(\sqrt{z})}.$$

Man hat sonach

$$\text{(IV.)} \qquad \frac{\partial\left(z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z} = \tfrac{1}{2} \cdot z^{\frac{\nu-1}{2}} J^{\nu-1}_{(\sqrt{z})}.$$

Differentiirt man diese Gleichung noch $(m-1)$mal nach z, so erhält man:

$$\text{(IV.a.)} \qquad \frac{\partial^m\left(z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{\frac{\nu-m}{2}} J^{\nu-m}_{(\sqrt{z})},$$

d. h. um die Function $z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$ $m$mal nach z zu differentiiren, braucht man nur den Index ν um m zu vermindern, und noch den Factor $(\frac{1}{2})^m$ beizufügen. Dabei wird jedoch vorausgesetzt, dass ν grösser als $m - \frac{1}{2}$ sei.

Setzt man in der Gleichung (IV.a.) $m+\nu$ statt ν, so nimmt sie folgende Gestalt an:

$$\text{(IV.b.)} \qquad \frac{\partial^m\left(z^{\frac{m+\nu}{2}} J^{m+\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$$

und macht man hierin $\nu = 0$, so hat man noch

$$\text{(IV.c.)}\qquad \frac{\partial^m\left(z^{\frac{m}{2}} J^m_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})^m \cdot J^0_{(\sqrt{z})} \,.$$

Setzt man sowohl in (III. a) als in (IV. a) $\nu = 0$, so erhält man

$$\text{(III.}_0\text{)}\qquad \frac{\partial^m J^0_{(\sqrt{z})}}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{-\frac{m}{2}} J^m_{(\sqrt{z})}$$

$$\text{(IV.}_0\text{)}\qquad \frac{\partial^m J^0_{(\sqrt{z})}}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{-\frac{m}{2}} J^{-m}_{(\sqrt{z})} \,.$$

Wollte man die letztere Gleichung gelten lassen, so müsste man die Bessel'sche Function für negativ ganze Indices durch die Gleichung

$$J^{-m}_{(z)} = (-1)^m J^m_{(z)}$$

definiren. Die allgemeine Definition für ein beliebig negatives ν, von welcher diese hier nur ein specieller Fall ist, wird im nächsten Paragraphen gegeben werden.

Denkt man sich sowohl in (III.) als in (IV.) $\zeta = z^2$ an die Stelle von z gesetzt, und multiplicirt sodann jede derselben mit

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = 2z \,,$$

so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\text{(1.)}\qquad \frac{\partial\left(z^{-\nu} J^\nu_{(z)}\right)}{\partial z} = -\, z^{-\nu} J^{\nu+1}_{(z)}$$

$$\text{(2.)}\qquad \frac{\partial\left(z^{\nu} J^\nu_{(z)}\right)}{\partial z} = z^{\nu} J^{\nu-1}_{(z)} \,.$$

Aus diesen gehen wiederum, wenn man zur Linken die Producte differentiirt, folgende zwei Gleichungen hervor:

$$\text{(3).}\qquad \frac{\partial J^\nu_{(z)}}{\partial z} = \frac{\nu}{z} J^\nu_{(z)} - J^{\nu+1}_{(z)}$$

$$\text{(4).}\qquad \frac{\partial J^\nu_{(z)}}{\partial z} = -\frac{\nu}{z} J^\nu_{(z)} + J^{\nu-1}_{(z)} \,.$$

Durch Subtraction dieser beiden Gleichungen würde man auf (II. a.) zurückkommen; ihre Addition aber führt zu der Formel

$$\text{(5.)}\qquad 2\,\frac{\partial J^\nu_{(z)}}{\partial z} = J^{\nu-1}_{(z)} - J^{\nu+1}_{(z)} \,.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung erhält man weiter:

$$(6).\qquad \frac{\partial^m J^{\nu}_{(z)}}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})^m \sum (-1)^p \cdot \frac{m^{p|-1}}{p!} J^{\nu-m+2p}_{(z)}\,,$$

eine Formel, deren allgemeine Geltung durch das oben (§. 1) bereits angewendete inductorische Verfahren leicht bewiesen werden kann.

Die Multiplication der Formel (5.) mit der Gleichung (II. a.) ergibt endlich noch

$$(7.)\qquad \frac{2\nu}{z} \cdot \frac{\partial (J^{\nu}_{(z)})^2}{\partial z} = (J^{\nu-1}_{(z)})^2 - (J^{\nu+1}_{(z)})^2.$$

§. 4. Definition von $J^{\nu}_{(z)}$ für negative ν.

Wendet man auf die Gleichung (III. b.), nämlich auf

$$(\tfrac{1}{2})^m z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})} = \frac{\partial^m \left(z^{\frac{m+\nu}{2}} J^{m+\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m}$$

$$= \frac{\partial^m \left(z^{m+\nu} z^{-\frac{m+\nu}{2}} \cdot J^{m+\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m}$$

zur Rechten den Satz

$$\frac{\partial^m (PQ)}{\partial z^m} = \sum_{p=0}^{p=m} \frac{m^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{\partial^p P}{\partial z^p} \cdot \frac{\partial^{m-p} Q}{\partial z^{m-p}}$$

an, indem man bedenkt, dass

$$\frac{\partial^p z^{m+\nu}}{\partial z^p} = (m+\nu)^{p|-1} \cdot z^{m+\nu-p}$$

und nach (III. a.)

$$\frac{\partial^{m-p}\left(z^{-\frac{m+\nu}{2}} J^{m+\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^{m-p}} = (-\tfrac{1}{2})^{m-p} z^{-\frac{2m+\nu-p}{2}} J^{2m+\nu-p}_{(\sqrt{z})}$$

ist, so erhält man zunächst

$$(\tfrac{1}{2})^m z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})} = \sum (-\tfrac{1}{2})^{m-p} \cdot \frac{m^{p|-1}(m+\nu)^{p|-1}}{p!} \cdot z^{\frac{\nu-p}{2}} J^{2m+\nu-p}_{(\sqrt{z})}\,,$$

also, wenn man jetzt z^2 statt z schreibt, und beiderseits mit $2^m z^{-\nu}$ multiplicirt:

$$(\text{V.})\quad J^{\nu}_{(z)} = (-1)^m \sum_{p=0}^{p=m} (-2)^p \cdot \frac{m^{p|-1}(m+\nu)^{p|-1}}{p!} z^{-p} \cdot J^{2m+\nu-p}_{(z)}.$$

Die endliche Reihe zur Rechten befolgt, so lange $\nu > -\frac{1}{2}$ ist, die nämlichen Gesetze, wie die Eingangs definirte Function $J^{\nu}_{(z)}$, indem sie alsdann mit ihr vollkommen identisch ist. Sie befolgt sie aber auch dann noch, wenn ν negativ und kleiner als $-\frac{1}{2}$ ist, so lange nur $2m + \nu - p$ grösser als $-\frac{1}{2}$ bleibt, was aber wegen des willkürlich zu wählenden m immer bewirkt werden kann.

Die Gleichung (V.) kann uns daher als Definition der Function $J^{\nu}_{(z)}$ gelten, für den Fall, dass ν negativ und unter $-\frac{1}{2}$ ist. Durch sie kann $J^{\nu}_{(z)}$ bei negativem ν auf unendlich viele Arten durch eine endliche Reihe dargestellt werden, welche nur Bessel'sche Functionen mit positivem Index enthält, wenn nur das positiv ganze m der Bedingung $m + \nu > 0$ gemäss gewählt wird. Wo also die in der ursprünglichen Definition (I.) der Bessel'schen Function zugeschriebene Form zu gelten aufhört, tritt die neue in Gleichung (V.) ausgedrückte Form dafür ein. Für diese neue Form der Function gelten die Grundgesetze (II., III. und IV.) ebenso gut, wie für die anfängliche, was sehr leicht nachzuweisen ist.

Wir können daher jetzt aussprechen:

Die Gleichungen (II., III., IV.) und alle daraus abgeleiteten gelten für jedes beliebig reelle (positive oder negative) ν.

Darum gilt auch die Gleichung (V.) selbst, auch wenn zur Rechten Bessel'sche Functionen mit negativen Indices auftreten, falls man denselben nur die Bedeutung beilegt, welche sie gemäss ihrer durch die nämliche Gleichung (V.) gegebenen Definition haben müssen.

Als speciellen Fall erhalten wir aus (V.) für $\nu = -m$

$$\text{(V.a.)} \qquad J^{-m}_{(z)} = (-1)^m J^{m}_{(z)}$$

eine Gleichung, auf welche wir bereits durch die Betrachtungen des vorigen Paragraphen geführt wurden.

Um eine Anwendung der letzteren Gleichung zu zeigen, werde in (IV. a.) $2m$ statt m und m statt ν eingesetzt. Es ergibt sich zunächst

$$\frac{\partial^{2m}\left(z^{\frac{m}{2}} J^{m}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^{2m}} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2m} z^{-\frac{m}{2}} J^{-m}_{(\sqrt{z})} \quad ;$$

sodann mit Rücksicht auf (V. a.)

$$\frac{\partial^{2m}\left(z^{\frac{m}{2}} J^{m}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^{2m}} = (-1)^m \cdot \frac{z^{-\frac{m}{2}}}{2^{2m}} J^{m}_{(\sqrt{z})} \; .$$

Dasselbe Resultat erhält man auch, ohne negative Indices zu gebrauchen, wenn man (IV. c.) m mal nach z differentiirt und dann (III.$_0$.) anwendet. Man findet nämlich zunächst

$$\frac{\partial^{2m}\left(z^{\frac{m}{2}} J^{m}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^{2m}} = (\tfrac{1}{2})^m \cdot \frac{\partial^m J^{0}_{(\sqrt{z})}}{\partial z^m} \; .$$

Nach (III.$_0$.) aber ist

$$\frac{\partial^m J^{0}_{(\sqrt{z})}}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{-\frac{m}{2}} J^{m}_{(\sqrt{z})}$$

und man hat sonach dieselbe Gleichung wie oben gefunden.

§. 5. Entwicklung von $(z+h)^{\pm\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z+h})}$.

Durch Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes auf die Function $z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$ erhalten wir:

$$(z+h)^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z+h})} = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{h^p}{p!} \cdot \frac{\partial^p\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^p}$$
$$+ \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1}\left((z+\Theta h)^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z+\Theta h})}\right)}{\partial z^{n+1}} ,$$

wo Θ ein echter positiver Bruch ist und dem p alle positiven ganzen Werthe von 0 bis n beizulegen sind. Nun ist aber nach (III. a.)

$$\frac{\partial^p\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^p} = (-\tfrac{1}{2})^p \cdot z^{-\frac{\nu+p}{2}} J^{\nu+p}_{(\sqrt{z})} \; .$$

Man hat also

$$\text{(VI.)} \qquad (z+h)^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z+h})} = \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \cdot \frac{h^p}{2^{p|2}} \cdot z^{-\frac{\nu+p}{2}} J^{\nu+p}_{(\sqrt{z})}$$
$$+ (-1)^{n+1} \cdot \frac{h^{n+1}}{2^{n+1|2}} (z+\Theta h)^{-\frac{\nu+n+1}{2}} J^{\nu+n+1}_{(\sqrt{z+\Theta h})} \; .$$

Durch dasselbe Verfahren, angewendet auf die Function $z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$, ergibt sich

$$\text{(VII.)} \quad (z+h)^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z+h})} = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{h^p}{2^p|2} z^{\frac{\nu-p}{2}} J^{\nu-p}_{(\sqrt{z})}$$

$$+ \frac{h^{n+1}}{2^{n+1}|2} (z+\Theta h)^{\frac{\nu-n-1}{2}} J^{\nu-n-1}_{(\sqrt{z+\Theta h})}.$$

Beide Formeln (VI.) und (VII.) gelten für jedes beliebige reelle ν.

Die Gleichung (VI.) kann übrigens auch ohne Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes, freilich nur für positiv ganze Werthe des Index, in folgender Weise abgeleitet werden.

Das Doppelintegral

$$\iint e^{i(u\sqrt{y}+v\sqrt{z})} \, . \, du\, dv$$

werde über die Oberfläche eines Kreises vom Radius 1 ausgedehnt, so dass die Veränderlichen u und v an die Bedingung $u^2+v^2 \overline{\gtrless} 1$ gebunden sind. Führt man nun statt u und v die neuen Variabeln u' und v' mittelst der Gleichungen

$$u\sqrt{y+z} = u'\sqrt{y} - v'\sqrt{z}$$
$$v\sqrt{y+z} = u'\sqrt{z} + v'\sqrt{y}$$

ein, so hat man erstlich

$$u\sqrt{y} + v\sqrt{z} = u'\sqrt{y+z},$$

ferner

$$\frac{\partial u}{\partial u'} = \sqrt{\frac{y}{y+z}} \qquad \frac{\partial v}{\partial u'} = \sqrt{\frac{z}{y+z}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial v'} = -\sqrt{\frac{z}{y+z}} \qquad \frac{\partial v}{\partial v'} = \sqrt{\frac{y}{y+z}},$$

demnach

$$\frac{\partial u}{\partial u'} \cdot \frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial u}{\partial v'} \cdot \frac{\partial v}{\partial u'} = 1 .$$

Das umgeformte Doppelintegral lautet demnach

$$\iint e^{iu'\sqrt{y+z}} \, . \, du'\, dv'$$

mit der Bedingung $u'^2 + v'^2 \overline{\gtrless} 1$, weil ja $u'^2+v'^2=u^2+v^2$ ist.

Integrirt man nun hier zunächst nach v', so erhält man, weil $\sqrt{1-u'^2}$ und $-\sqrt{1-u'^2}$ als obere und untere Grenze für v', dagegen $+1$ und -1 als solche für u' einzusetzen sind:

$$\iint\limits_{u'^2+v'^2 \leqq 1} e^{iu'\sqrt{y+z}}\, du'\, dv' = 2\int\limits_{-1}^{+1} e^{iu'\sqrt{y+z}}\sqrt{1-u'^2}\cdot du$$
$$= 2\pi \cdot \frac{J^1(\sqrt{y+z})}{\sqrt{y+z}}\,.$$

Integrirt man dagegen das oben vorgelegte Doppelintegral zuerst nach v, so ergibt sich

$$\iint e^{i(u\sqrt{y}+v\sqrt{z})}\, du\, dv = \frac{1}{i\sqrt{z}}\int\limits_{-1}^{+1} e^{iu\sqrt{y}}\left(e^{i\sqrt{1-u^2}\cdot\sqrt{z}} - e^{-i\sqrt{1-u^2}\sqrt{z}}\right) du\,.$$

Nun ist

$$e^{i\sqrt{1-u^2}\sqrt{z}} - e^{-i\sqrt{1-u^2}\sqrt{z}} = 2i\sin\left(\sqrt{1-u^2}\sqrt{z}\right)$$
$$= 2i\sum(-1)^p\cdot\frac{(1-u^2)^{\frac{2p+1}{2}}\, z^{\frac{2p+1}{2}}}{(2p+1)!}\,.$$

Folglich hat man

$$\pi\,\frac{J^1(\sqrt{y+z})}{\sqrt{y+z}} = \sum(-1)^p\cdot\frac{z^p}{(2p+1)!}\int\limits_{-1}^{+1} e^{iu\sqrt{y}}(1-u^2)^{\frac{2p+1}{2}}\, du\,,$$

oder, weil

$$\int\limits_{-1}^{+1} e^{iu\sqrt{y}}(1-u^2)^{\frac{2p+1}{2}}\, du = \pi\cdot 1^{p+1|2}\cdot\frac{J^{p+1}_{(\sqrt{y})}}{y^{\frac{p+1}{2}}}$$

ist, die folgende Formel, welche nichts anderes als die Gleichung (VI.) ist für $\nu = 1$:

$$\frac{J^1(\sqrt{y+z})}{\sqrt{y+z}} = \sum(-1)^p\cdot\frac{z^p}{2^{p|2}}\cdot y^{-\frac{p+1}{2}} J^{p+1}_{(\sqrt{y})}\,.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach Anleitung der Formel (III. a.) $(n-1)$mal nach y, so liefert sie sofort die Entwickelung von $(y+z)^{-\frac{n}{2}} J^n_{(\sqrt{y+z})}$ für jedes positiv ganze n. Auch die entsprechende Formel für J^0 kann daraus abgeleitet werden, wenn man mit $y+z$ beiderseits multiplicirt, dann zur Linken nach (IV.), zur Rechten nach (III.) differentiirt, und schliesslich noch die Reductionsformel (II.) anwendet.

Integrirt man das obige transformirte Doppelintegral nach u (die Accente können jetzt als überflüssig weggelassen werden), so erhält man

$$\int\int e^{iu\sqrt{y+z}}\,du\,dv = \frac{1}{i\sqrt{y+z}}\int_{-1}^{+1}\left(e^{i\sqrt{y+z}\,\sqrt{1-v^2}} - e^{-i\sqrt{y+z}\,\sqrt{1-v^2}}\right)dv$$

$$= \frac{2}{\sqrt{y+z}}\int_{-1}^{+1}\sin\left(\sqrt{y+z}\cdot\sqrt{1-v^2}\right)dv\,.$$

Man hat daher, zusammengestellt, für die Function J^1 folgende bemerkenswerthe Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} J^1(\sqrt{y+z}) = \dfrac{\sqrt{y+z}}{2\pi}\displaystyle\int\int e^{i(u\sqrt{y}+v\sqrt{z})}\,du\,dv \\ \qquad\qquad\quad = \dfrac{\sqrt{y+z}}{2\pi}\displaystyle\int\int e^{iu\sqrt{y+z}}\,du\,dv\,, \end{cases}$$

wo $u^2 + v^2 \overline{\gtrless} 1$ ist; und weiter

$$(2.)\quad \begin{cases} J^1(\sqrt{y+z}) = \dfrac{\sqrt{y+z}}{\pi\sqrt{z}}\displaystyle\int_{-1}^{+1} e^{iu\sqrt{y}}\sin\left(\sqrt{z}\sqrt{1-u^2}\right)\cdot du \\ \qquad\qquad\quad = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\sin\left(\sqrt{y+z}\sqrt{1-u^2}\right)\cdot du\,, \end{cases}$$

und darum auch

$$J^1(z) = \frac{z}{\pi}\int_{-1}^{+1}\cos(zu)\sqrt{1-u^2}\cdot du = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\sin\left(z\sqrt{1-u^2}\right)\cdot du,$$

oder, wenn man darin einmal $u = \cos\omega$, dann $u = \sin\omega$ setzt:

$$(3.)\quad \begin{cases} J^1(z) = \dfrac{z}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(z\cos\omega)\sin^2\omega\cdot d\omega = \dfrac{z}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(z\sin\omega)\cos^2\omega\cdot d\omega \\ \qquad\quad = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(z\sin\omega)\sin\omega\cdot d\omega = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(z\cos\omega)\cos\omega\cdot d\omega\,. \end{cases}$$

§. 6. Entwickelung von $J^{\nu}_{(z)}$ nach Potenzen von z.

Mit Hilfe der Formel (VI.) lässt sich $J^{\nu}_{(z)}$ bequem in eine nach Potenzen von z fortlaufende Reihe entwickeln. Wir setzen nämlich in (VI.) $z = 0$ und $h = z$, und erhalten:

$$\frac{J^{\nu}_{(\sqrt{z})}}{z^{\frac{\nu}{2}}} = \sum (-1)^p\cdot\frac{z^p}{2^p\,|^2}\left(\frac{J^{\nu+p}_{(\sqrt{z})}}{z^{\frac{\nu+p}{2}}}\right)_{z=0}\,.$$

Es is aber

$$\left(\frac{J^{\nu+p}_{(\sqrt{z})}}{z^{\frac{\nu+p}{2}}}\right)_{z=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot 2^{\nu+p}\,\Gamma(\nu+p+\frac{1}{2})}\int_0^\pi \sin^{2\nu+2p}\omega\cdot d\omega\,.$$

Setzt man in dem letzteren Integrale $\cos\omega = 2x-1$, folglich $\sin\omega = 2\sqrt{x(1-x)}$, $d\omega = -\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$, so wird

$$\int_0^\pi \sin^{2\nu+2p}\omega\cdot d\omega = 2^{2\nu+2p}\int_0^1 x^{\nu+p-\frac{1}{2}}(1-x)^{\nu+p-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= 2^{2\nu+2p}\cdot\Phi(\nu+p+\tfrac{1}{2}\,,\,\nu+p+\tfrac{1}{2})$$

$$= 2^{2\nu+2p}\,\frac{(\Gamma(\nu+p+\frac{1}{2}))^2}{\Gamma(2\nu+2p+1)}\,.$$

Man hat also

$$\left(\frac{J^{\nu+p}_{(\sqrt{z})}}{z^{\frac{\nu+p}{2}}}\right)_{z=0} = \frac{2^{\nu+p}\,\Gamma(\nu+p+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(2\nu+2p+1)}\,.$$

Nun ist

$$\Gamma(2\nu+2p+1) = \frac{2^{2\nu+2p}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(\nu+p+\tfrac{1}{2})\,.\,\Gamma(\nu+p+1)\,,$$

folglich

$$\left(\frac{J^{\nu+p}_{(\sqrt{z})}}{z^{\frac{\nu+p}{2}}}\right)_{z=0} = \frac{1}{2^{\nu+p}\,\Gamma(\nu+p+1)} = \frac{1}{2^{\nu}\,(2\nu+2)^{p|2}\,\Gamma(\nu+1)}\,.$$

Setzt man diesen Werth oben ein, und schreibt z^2 statt z, so lautet die gesuchte Reihe

$$\text{(VIII.)}\qquad J^{\nu}_{(z)} = \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}\cdot\sum(-1)^p\cdot\frac{z^{2p}}{2^{p|2}\,(2\nu+2)^{p|2}}\,.$$

Als unendliche Reihe betrachtet, convergirt dieselbe für jeden Werth von z; bricht man sie aber mit dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede ab, so muss noch das Ergänzungsglied

$$(-1)^{n+1}\cdot\frac{z^{\nu+2n+2}}{2^{n+1|2}}\cdot\frac{J^{\nu+n+1}_{(\Theta z)}}{(\Theta z)^{\nu+n+1}}$$

hinzugefügt werden.

Um aus der Formel (VIII.), welche, weil bei ihrer Ableitung die Gleichung (I.) benutzt wurde, nur für $\nu > -\frac{1}{2}$ gilt, die speciellere für ein positiv ganzes $\nu(=n)$ herzuleiten, berücksichtigen wir, dass

$$\Gamma(n+1) = n! = 1^{n|1}$$

ist, und erhalten sogleich

$$\text{(VIII. a.)} \qquad J^n_{(z)} = \sum (-1)^p \cdot \frac{z^{n+2p}}{2^{p|2}\, 2^{n+p|2}}$$

und daraus noch specieller für $n = 0$ und $n = 1$:

$$J^0_{(z)} = \sum (-1)^p \cdot \frac{z^{2p}}{(2^{p|2})^2} = \sum (-1)^p \cdot \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2p}}{(p!)^2}$$

und

$$J^1_{(z)} = z \sum (-1)^p \cdot \frac{z^{2p}}{2^{p|2}\, 2^{p+1|2}} = \frac{z}{2} \sum (-1)^p \cdot \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2p}}{p!(p+1)!}.$$

Beiläufig sei noch bemerkt, dass in allen Summen, denen für den veränderlichen Buchstaben (hier p) nicht besonders Grenzen beigeschrieben sind, demselben nach und nach alle positiv ganzen Werthe von 0 bis ∞, die Null mit eingeschlossen, beigelegt zu denken sind.

§. 7. Andere Reihenentwickelung.

Um eine von der vorigen verschiedene, aber ebenfalls nach steigenden Potenzen von z fortlaufende Entwickelung von $J^\nu_{(z)}$ zu erhalten, setzen wir in dem Integral

$$\int_{-1}^{+1} \cos zu\, (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot du$$

$u = 1 - v$. Dasselbe verwandelt sich dadurch in

$$\int_0^2 \cos z\,(1-v)\, [v(2-v)]^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot dv,$$

oder, wenn man den Cosinus entwickelt, in

$$\cos z \int_0^2 \cos zv\, [v(2-v)]^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot dv + \sin z \int_0^2 \sin zv\, [v(2-v)]^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot dv.$$

Indem man hierin $\cos zv$ und $\sin zv$ resp. durch die Reihen $1 - \frac{z^2 v^2}{2!} + \frac{z^4 v^4}{4!} - \cdots$ und $zv - \frac{z^3 v^3}{3!} + \frac{z^5 v^5}{5!} - \cdots$ ersetzt und dann Glied für Glied integrirt, erhält man für jedes dieser beiden Integrale eine nach positiven steigenden Potenzen fort-

schreitende Reihe. Bezeichnen wir diese Reihen einstweilen mit M und N, so haben wir

$$(1.)\qquad J^{\nu}_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} (M \cos z + N \sin z)\,.$$

Wendet man dieselbe Transformation an auf das Integral

$$\int\limits_{-1}^{+1} \sin zu\,(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,.\,du\,,$$

dessen Werth Null ist, so gelangt man zur Gleichung

$$(2.)\qquad 0 = M \sin z - N \cos z\,.$$

Eliminirt man nun aus (1.) und (2.) zuerst N, dann M, so erhält man

$$(3.)\qquad J^{\nu}_{(z)}\,.\cos z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} M\,,$$

$$(4.)\qquad J^{\nu}_{(z)}\,.\sin z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} N\,.$$

Um daher die Reihen M und N zu entwickeln, brauchen wir nur die im vorhergehenden Paragraphen für $J^{\nu}_{(z)}$ angegebene Reihe resp. mit den bekannten Reihen für $\cos z$ und $\sin z$ zu multipliciren. Indem man dabei in geeigneter Weise zusammenzieht, findet man

$$M = \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1)} \left\{1 - \frac{2\nu+3}{2\nu+2} \cdot \frac{z^2}{2!} + \frac{(2\nu+5)(2\nu+7)}{(2\nu+2)(2\nu+4)} \cdot \frac{z^4}{4!} - \right.$$
$$\left. - \frac{(2\nu+7)(2\nu+9)(2\nu+11)}{(2\nu+2)(2\nu+4)(2\nu+6)} \cdot \frac{z^6}{6!} + \cdots \right\}$$

$$= \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1)} \sum (-1)^p \cdot \frac{(2\nu+2p+1)^{p|2}}{(2\nu+2)^{p|2}} \cdot \frac{z^{2p}}{(2p)!}$$

und

$$N = \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1)} \left\{z - \frac{2\nu+5}{2\nu+2} \cdot \frac{z^3}{3!} + \frac{(2\nu+7)(2\nu+9)}{(2\nu+2)(2\nu+4)} \cdot \frac{z^5}{5!} - \right.$$
$$\left. - \frac{(2\nu+9)(2\nu+11)(2\nu+13)}{(2\nu+2)(2\nu+4)(2\nu+6)} \cdot \frac{z^7}{7!} + \cdots \right\}$$

$$= \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1)} \sum (-1)^p \cdot \frac{(2\nu+2p+3)^{p|2}}{(2\nu+2)^{p|2}} \cdot \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}\,.$$

Wir erhalten daher für $J^{\nu}_{(z)}$ folgende, für jeden Werth von z convergente Entwickelungen

$$(5).\quad J^{\nu}_{(z)} \cdot \cos z = \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)} \sum (-1)^p \cdot \frac{(2\nu+2p+1)^{p|2}}{(2\nu+2)^{p|2}} \cdot \frac{z^{2p}}{(2p)!}\,,$$

$$(6).\quad J^{\nu}_{(z)} \cdot \sin z = \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)} \sum (-1)^{p} \cdot \frac{(2\nu+2p+3)^{p|2}}{(2\nu+2)^{p|2}} \cdot \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!},$$

$$(7).\quad J^{\nu}_{(z)} = \frac{z^{\nu}\cos z}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)} \sum (-1)^{p} \cdot \frac{(2\nu+2p+1)^{p|2}}{(2\nu+2)^{p|2}} \cdot \frac{z^{2p}}{(2p)!}$$

$$+ \frac{z^{\nu}\sin z}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)} \sum (-1)^{p} \cdot \frac{(2\nu+2p+3)^{p|2}}{(2\nu+2)^{p|2}} \cdot \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Aus dem blossen Anblick der Gleichungen (3.) und (4.) erhellt, dass die Reihe M Null ist für $z = \frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi\ \ldots$ überhaupt für $z = \frac{2m+1}{2}\pi$, was auch ν sein mag; und dass ebenso N für $z = m\pi$ verschwindet.

§. 8. Integralformeln für $J^{\nu}_{(z)}$.

Durch Umkehrung der Sätze des §. 2. erhalten wir eine entsprechende Reihe von Integralformeln. Aus (III. a.) ergibt sich durch $m$malige Integration nach z:

$$\int^{m} z^{-\frac{\nu+m}{2}} J^{\nu+m}_{(\sqrt{z})} \cdot dz^{m} = (-2)^{m} \cdot z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})} + (-2)^{m} \sum_{p=0}^{p=m-1} C_{p} \cdot z^{p},$$

wo die bei der wiederholten Integration eingehenden m willkürlichen Constanten, unter dem Summenzeichen zur Rechten, mit C_p bezeichnet sind. Um diese Constanten unter der Voraussetzung, dass jede Integration von 0 bis z ausgeführt wird, zu bestimmen, differentiiren wir die vorstehende Gleichung wieder $n$mal nach z, und erhalten

$$\int^{m-n} z^{-\frac{\nu+m}{2}} J^{\nu+m}_{(\sqrt{z})} \cdot dz^{m-n} = (-2)^{m-n} \cdot z^{-\frac{\nu+n}{2}} J^{\nu+n}_{(\sqrt{z})} + (-2)^{m} \sum_{p=n}^{p=m-1} C_{p} \cdot p^{n|-1} \cdot z^{p-n}.$$

In der Summe zur Rechten können wir p, statt von n bis $m-1$, ebenso gut auch von 0 bis $m-n-1$ gehen lassen, nur müssen wir alsdann $p+n$ statt p schreiben. Die Summe lautet jetzt:

$$(-2)^{m} \sum_{p=0}^{p=m-n-1} C_{p+n} \cdot (p+n)^{n|-1} z^{p}.$$

Setzt man nun $z = 0$, so erhält man, weil unter der oben gemachten Voraussetzung das Integral zur Linken verschwindet:

$$(-2)^{m-n} \left(\frac{\overset{\nu+n}{J}(\sqrt{z})}{z^{\frac{\nu+n}{2}}} \right)_{z=0} + (-2)^m \,.\, n!\, C_n = 0\,.$$

Da nun, dem vorhergehenden Paragraphen zu Folge,

$$\left(\frac{\overset{\nu+n}{J}(\sqrt{z})}{z^{\frac{\nu+n}{2}}} \right)_{z=0} = \frac{1}{2^\nu\,(2\nu+2)^{n|2}\,\Gamma(\nu+1)}\,,$$

so haben wir

$$C_n = -\frac{(-1)^n}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)\,.\,2^{n|2}\,(2\nu+2)^{n|2}}\,.$$

Setzt man dieses Resultat in die erste Gleichung ein, so hat man, wenn jede Integration von 0 bis z ausgeführt gedacht wird:

$$\text{(1.)}\qquad \int^m z^{-\frac{\nu+m}{2}} \overset{\nu+m}{J}(\sqrt{z}) \,.\, dz^m = (-2)^m \,.\, z^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z})$$
$$- \frac{(-2)^m}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)} \sum_{p=1}^{p=m-1} \frac{(-1)^p \,.\, z^p}{2^{p|2}\,(2\nu+2)^{p|2}}\,.$$

Für $m = 1$ ergibt sich daraus speciell:

$$\text{(1.a.)}\qquad \int_0^z z^{-\frac{\nu+1}{2}} \overset{\nu+1}{J}(\sqrt{z}) \,.\, dz = -2 \,.\, z^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z}) + \frac{2}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}\,.$$

Wird ebenso die Formel (IV.b.) des §. 2. $m$mal nach z integrirt, so kommt zunächst

$$\int^m z^{\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z}) \,.\, dz^m = 2^m \,.\, z^{\frac{m+\nu}{2}} \overset{m+\nu}{J}(\sqrt{z})$$
$$+ c_{m-1} z^{m-1} + \cdots + c_2 z^2 + c_1 z + c_0\,.$$

Gehen sämmtliche Integrationen von 0 bis z, so verschwinden alle willkührlichen Constanten, und man hat einfach:

$$\text{(2.)}\qquad \int^m z^{\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z})\, dz^m = 2^m \,.\, z^{\frac{m+\nu}{2}} \overset{m+\nu}{J}(\sqrt{z})$$

und speciell für $m = 1$:

$$\text{(2.a.)}\qquad \int_0^z z^{\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z}) \,.\, dz = 2 z^{\frac{\nu+1}{2}} \overset{\nu+1}{J}(\sqrt{z})\,.$$

Zwei weitere Integralformeln resultiren aus den Gleichungen (1.) und (2.) des §. 2., nämlich

$$(3.)\qquad \int_0^z z^{-\nu} J^{\nu+1}_{(z)} \, . \, dz = - z^{-\nu} J^{\nu}_{(z)} + \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$$

und

$$(4).\qquad \int_0^z z^{\nu} J^{\nu-1}_{(z)} \, . \, dz = z^{\nu} J^{\nu}_{(z)} \, .$$

Hier wie oben ist die Bestimmung der willkührlichen Constanten unter der Annahme $\nu > -\frac{1}{2}$ ausgeführt: es gelten jedoch sämmtliche Formeln, von den Constanten abgesehen, auch für beliebig negative ν.

Eine weitere brauchbare Formel erhalten wir durch Umkehrung der am Ende des §. 3. entwickelten Gleichung

$$\frac{\partial^{2m}\left(z^{\frac{m}{2}} J^{m}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^{2m}} = \frac{(-1)^m}{2^{2m}} \, . \, z^{-\frac{m}{2}} J^{m}_{(\sqrt{z})} \, .$$

Integrirt man dieselbe $2m$mal nach z, so folgt

$$(5.)\qquad \int^{2m} z^{-\frac{m}{2}} J^{m}_{(\sqrt{z})} \, . \, dz^{2m} = (-1)^m \, . \, 2^{2m} \, . \, z^{\frac{m}{2}} J^{m}_{(\sqrt{z})} \, ,$$

wo wiederum keine willkührlichen Constanten beizufügen sind, wenn alle Integrationen zwischen 0 und z sich bewegen.

Beispielsweise ergibt sich daraus für $m=1$:

$$\int_0^z\int_0^z \frac{J^1(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} \, . \, dz^2 = -4 \, . \, \sqrt{z} \, . \, J^1(\sqrt{z}) \, .$$

Schliesslich möge noch auf ein bestimmtes Integral aufmerksam gemacht werden, welches aus der Formel (3.) hervorgeht, wenn man dort die obere Grenze $=\infty$ setzt. Wie später gezeigt werden wird, verschwindet $J^{\nu}_{(z)}$ für $z=\infty$, und man hat daher

$$(6.)\qquad \int_0^{\infty} z^{-\nu} J^{\nu+1}_{(z)} \, . \, dz = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)} \, .$$

§. 9. Folgerungen aus den Formeln des §. 5.

Aus den Formeln (VI.) und (VII.) des §. 5. lassen sich einige interessante Reihenentwickelungen ableiten. Setzt man nämlich

in (VI.) z^2 statt z und kz^2 statt h, so erhält man, wenn das Ergänzungsglied weggelassen und die Reihe ins Unendliche fortgesetzt gedacht wird, zunächst

$$J^{\nu}_{(z\sqrt{1+k})} = (1+k)^{\frac{\nu}{2}} \sum (-1)^p \cdot \frac{(kz)^p}{2^{p|2}} \cdot J^{\nu+p}_{(z)},$$

oder, wenn man λ^2 statt $1+k$ schreibt:

$$J^{\nu}_{(\lambda z)} = \lambda^{\nu} \sum (-1)^p \cdot \frac{(\lambda^2-1)^p}{2^{p|2}} \cdot z^p \cdot J^{\nu+p}_{(z)} \tag{1.}$$

und daraus speciell für $\lambda = \sqrt{2}$:

$$J^{\nu}_{(z\sqrt{2})} = 2^{\frac{\nu}{2}} \sum (-1)^p \cdot \frac{z^p}{2^{p|2}} \cdot J^{\nu+p}_{(z)}. \tag{2.}$$

Setzt man ferner in (VI.) z^2 statt z und $-z^2$ statt h, und bedenkt, dass

$$\left(\frac{J^{\nu}_{(z)}}{z^{\nu}}\right)_{z=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,.\,2^{\nu}\,.\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} \sin^{2\nu}\omega\,.\,d\omega = \frac{1}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}$$

ist, so hat man

$$\sum \frac{z^p}{2^{p|2}} \cdot J^{\nu+p}_{(z)} = \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}. \tag{3.}$$

Für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ ergeben sich daraus folgende speciellere Formeln:

$$\text{(3.a.)}\quad \begin{cases} J^0 + \frac{z}{2} J^1 + \frac{z^2}{2\cdot4} \cdot J^2 + \frac{z^3}{2\cdot4\cdot6} \cdot J^3 + \cdots = 1 \\ J^1 + \frac{z}{2} J^2 + \frac{z^2}{2\cdot4} \cdot J^3 + \frac{z^3}{2\cdot4\cdot6} \cdot J^4 + \cdots = \frac{z}{2} \\ J^2 + \frac{z}{2} J^3 + \frac{z^2}{2\cdot4} \cdot J^4 + \frac{z^3}{2\cdot4\cdot6} \cdot J^5 + \cdots = \frac{z^2}{2\cdot4} \\ J^3 + \frac{z}{2} J^4 + \frac{z^2}{2\cdot4} \cdot J^5 + \frac{z^3}{2\cdot4\cdot6} \cdot J^6 + \cdots = \frac{z^3}{2\cdot4\cdot6} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Wenn man daher die Glieder der unendlichen Reihe

$$e^{\frac{1}{2}z} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2\cdot4} + \frac{z^3}{2\cdot4\cdot6} + \cdots$$

folgeweise mit $J^0, J^1, J^2, \ldots$, oder mit $J^1, J^2, J^3, \ldots$, oder mit $J^2, J^3, J^4, \ldots$ u. s. w. multiplicirt, so erhält man als Resultate nach und nach die einzelnen Glieder der nämlichen Reihe $e^{\frac{1}{2}z}$.

Aus (VII.) findet man, wenn man daselbst ebenfalls z^2 statt z und $-z^2$ statt h substituirt, und wenn ν grösser als 0 ist:

$$(4.) \qquad \sum (-1)^p \cdot \frac{z^{\nu+p}}{2^{p|2}} J_{(z)}^{\nu-p} = 0 .$$

Ist hier ν positiv ganz $= m+1$, so kann diese Reihe in zwei zerlegt werden, deren eine endlich ist und nur Bessel'sche Functionen mit positiven Exponenten enthält, während in der andern unendlichen nur solche mit negativen Exponenten, nebst J^0, vorkommen. Man hat nämlich statt der vorigen Gleichung, wenn man $\nu = m+1$ setzt, und den Factor z^{m+1} unterdrückt:

$$\sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p \cdot \frac{z^p}{2^{p|2}} J_{(z)}^{m+1-p} + \sum_{p=m+1}^{p=\infty} (-1)^p \cdot \frac{z^p}{2^{p|2}} \cdot J_{(z)}^{m+1-p} = 0 .$$

Schreibt man nun in der zweiten Summe, mit Rücksicht auf Gleichung (V.a.) in §. 3., $(-1)^{m+1-p} J^{p-m-1}$ statt J^{m+1-p}, so wird die vorhergehende

$$\sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p \cdot \frac{z^p}{2^{p|2}} J_{(z)}^{m+1-p} - (-1)^m \sum_{p=m+1}^{p=\infty} \frac{z^p}{2^{p|2}} J_{(z)}^{p-m-1} = 0 ,$$

oder, wenn man in der zweiten Summe lieber $p+m+1$ statt p schreibt, und dann p von 0 bis ∞ gehen lässt:

$$\sum \frac{z^{m+1+p}}{2^{m+1+p|2}} J_{(z)}^p = \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^{m+p} \cdot \frac{z^p}{2^{p|2}} J_{(z)}^{m+1-p} ,$$

oder auch, wenn man die Glieder der endlichen Reihe zur Rechten nur umgekehrt anordnet:

$$(4.\text{a.}) \qquad \sum \frac{z^{m+1+p}}{2^{m+1+p|2}} \cdot J_{(z)}^p = \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p \cdot \frac{z^{m-p}}{2^{m-p|2}} \cdot J_{(z)}^{p+1} .$$

Für $m = 0, 1, 2, \dots$ geht daraus folgende Gruppe hervor:

$$(4.\text{b.}) \begin{cases} \frac{z}{2} J^0 + \frac{z^2}{2\cdot 4} J^1 + \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} J^2 + \cdots = J^1 \\ \frac{z^2}{2\cdot 4} J^0 + \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} J^1 + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} J^2 + \cdots = \frac{z}{2} J^1 - J^2 \\ \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} J^0 + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} J^1 + \frac{z^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} J^2 + \cdots = \frac{z^2}{2\cdot 4} J^1 - \frac{z}{2} J^2 + J^3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Diese Reihe von Gleichungen hätte man übrigens auch dadurch erhalten können, dass man in der ersten Gleichung der Gruppe (3.a.) $\sqrt{z}$ statt z gesetzt, dieselbe sodann gemäss (IV.a.) m mal differentiirt und nachträglich wieder z^2 statt z geschrieben hätte.

Wird von der mit $\frac{z}{2}$ multiplicirten ersten Gleichung der Gruppe (4. b.) die zweite abgezogen, so kommt

$$\frac{z^2}{2\cdot 4} J^0 + \frac{2z^3}{2\cdot 4\cdot 6} J^1 + \frac{3z^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} J^2 + \frac{4z^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} J^3 + \cdots = J^2.$$

Multiplicirt man ferner die zweite Gleichung mit $\frac{z}{4}$, zieht die dritte davon ab, und combinirt die so erhaltene Formel in geeigneter Weise mit der vorstehenden, so ergibt sich:

$$\frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} J^0 + \frac{3z^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} J^1 + \frac{6z^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} J^2 + \frac{10z^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} J^3 + \cdots = J^3.$$

Auf diesem Wege kann jede der Functionen $J^1, J^2, J^3, \ldots, J^{m+1}$ durch alle übrigen von J^0 an ausgedrückt werden. Man bemerkt, dass in den Zählern der Coefficienten die figurirten Zahlen der 0ten, 1., 2., 3., ... Ordnung auftreten.

In übersichtlicher Schreibweise lauten die entsprechenden Formeln:

$$(5.)\quad \begin{cases} J^1 = \sum \frac{z^{p+1}}{2^{p+1|2}} J^p \\ J^2 = \sum \frac{(p+1)\, z^{p+2}}{2^{p+2|2}} J^p \\ J^3 = \sum \frac{(p+1)(p+2)}{1\cdot 2} \cdot \frac{z^{p+3}}{2^{p+3|2}} \cdot J^p \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ J^{m+1} = \sum \frac{(p+1)^{m|1}}{m!} \cdot \frac{z^{p+m+1}}{2^{p+m+1|2}} \cdot J^p . \end{cases}$$

Die allgemeine Geltung der letzteren kann durch folgendes Inductionsverfahren dargethan werden. Nachdem $\sqrt{z}$ statt z gesetzt und beiderseits mit $z^{-\frac{m+1}{2}}$ multiplicirt worden ist, differentiire man nach z, wobei links die Grundformel (III.), rechts aber (IV.) zur Anwendung kommt. Dadurch erhält man:

$$z^{-\frac{m+2}{2}} \overset{m+2}{J}(\sqrt{z}) = -\sum \frac{(p+1)^{m|1}}{m!} \cdot \frac{z^{\frac{p-1}{2}}}{2^{p+m+1|2}} \overset{p-1}{J}(\sqrt{z}),$$

oder, wenn rechts das erste Glied abgesondert, $-J^1$ statt J^{-1} gesetzt und beiderseits mit $z^{-\frac{m+2}{2}}$ multiplicirt wird:

$$\overset{m+2}{J}(\sqrt{z}) = \frac{z^{\frac{m+1}{2}}}{2^{m+1|2}} \cdot \overset{1}{J}(\sqrt{z}) - \sum \frac{(p+2)^{m|1}}{m!} \cdot \frac{z^{\frac{p+m+2}{2}}}{2^{p+m+2|2}} \cdot \overset{p}{J}(\sqrt{z}) .$$

Substituirt man hierin statt $J^1_{(\sqrt{z})}$ die obige Reihe (5.), nachdem man $\sqrt{z}$ statt z in sie eingesetzt, so kommt:

$$J^{m+2}_{(\sqrt{z})} = \sum \frac{z^{\frac{p+m+2}{2}}}{2^{m+1|2}\,2^{p+1|2}} \cdot J^{p}_{(\sqrt{z})} - \sum \frac{(p+2)^{m|1}}{m!} \cdot \frac{z^{\frac{p+m+2}{2}}}{2^{p+m+2|2}} \cdot J^{p}_{(\sqrt{z})}$$

$$= \sum \left(\frac{1}{2^{m+1|2}\,2^{p+1|2}} - \frac{(p+2)^{m|1}}{m!\,2^{p+m+2|2}} \right) \cdot z^{\frac{p+m+2}{2}}\, J^{p}_{(\sqrt{z})}.$$

Nun ist aber, wie man sich leicht überzeugt

$$\frac{1}{2^{m+1|2}\,2^{p+1|2}} - \frac{(p+2)^{m|1}}{m!\,2^{p+m+2|2}} = \frac{(p+1)^{m+1|1}}{(m+1)!\,2^{p+m+2|2}}.$$

Man hat demnach

$$J^{m+2}_{(\sqrt{z})} = \sum \frac{(p+1)^{m+1|1}}{(m+1)!} \cdot \frac{z^{\frac{p+m+2}{2}}}{2^{p+m+2|2}} \cdot J^{p}_{(\sqrt{z})},$$

d. i. die letzte Gleichung der Gruppe (5.), mit dem Unterschied, dass $m+1$ statt m und $\sqrt{z}$ statt z steht. Wenn daher jene für irgend einen Werth von m richtig ist, so gilt sie jedesmal auch für den nächsthöheren, folglich allgemein.

Durch Addition sämmtlicher Gleichungen der Gruppe (3. a.) erhält man:

$$(6.)\quad e^{\frac{z}{2}} = \sum J^p + \frac{z}{2} \sum J^{p+1} + \frac{z^2}{2\cdot 4} \cdot \sum J^{p+2} + \cdots$$

Die Summen $J^0 + J^1 + J^2 + \cdots$, $J^1 + J^2 + J^3 + \cdots$, $J^2 + J^3 + J^4 + \cdots$ u. s. w., haben demnach die merkwürdige Eigenschaft, dass der Werth der unendlichen Reihe

$$e^{\frac{1}{2}z} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2\cdot 4} + \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots$$

nicht geändert wird, wenn man deren Glieder der Reihe nach mit jenen Summen multiplicirt.

Addirt man ferner die erste, dritte, fünfte ... Gleichung der Gruppe (3. a.), nachdem dieselben vorher abwechselnd mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen worden sind; sodann in gleicher Weise die zweite, vierte, sechste ..., so kommt man auf folgende zwei Formeln:

$$(7.)\quad \cos\tfrac{1}{2}z = \sum (-1)^p J^{2p} + \frac{z}{2} \sum (-1)^p J^{2p+1} + \frac{z^2}{2\cdot 4} \sum (-1)^p J^{2p+2} + \cdots$$

$$(8.)\quad \sin\tfrac{1}{2}z = \sum (-1)^p J^{2p+1} + \frac{z}{2} \sum (-1)^p J^{2p+2} + \frac{z^2}{2\cdot 4} \sum (-1)^p J^{2p+3} + \cdots$$

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (3. a.) mit J^n, die zweite mit J^{n+1}, u. s. f., und addirt sämmtliche, so findet man

$$\sum J^p\, J^{p+n} + \frac{z}{2} \sum J^{p+1}\, J^{p+n} + \frac{z^2}{2\cdot 4} \sum J^{p+2}\, J^{p+n} + \cdots$$
$$= \frac{z^n}{2^n|2}\,.$$

Darin ist n unveränderlich, dem p aber müssen in jeder Summe alle positiv ganzen Werthe von 0 bis ∞ beigelegt werden.

Denkt man sich die Gleichung (9.) für alle n-Werthe von 0 bis ∞ angeschrieben, und addirt sämmtliche einzelne Gleichungen, so erhält man die mit (6.) analoge Formel:

$$(10.)\quad e^{\frac{z}{2}} = \sum\sum J^p\, J^{p+q} + \frac{z}{2} \sum\sum J^{p+1}\, J^{p+q}$$
$$+ \frac{z^2}{2\cdot 4} \sum\sum J^{p+2}\, J^{p+q} + \cdots,$$

wo die doppelten Summenzeichen bedeuten, dass sowohl dem p als dem q alle positiv ganzen Werthe von 0 bis ∞ beizulegen sind.

Man sieht, wie man dieses Verfahren in's Unendliche fortsetzen und immer neue derartige Formeln ableiten könnte.

Kehren wir jedoch schliesslich zu den oben gefundenen Gleichungen (2.) und (3.) zurück. Wird letztere mit $2^{\frac{\nu}{2}}$ multiplicirt und erstere zu ihr addirt oder von ihr abgezogen, so resultiren folgende zwei Gleichungen:

$$(11.)\qquad \sum \frac{z^{2p}}{2^{2p}|2} \cdot J_{(z)}^{\nu+2p} = \frac{z^\nu}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)} + \frac{J^{\nu}_{(z\sqrt{2})}}{2^{\frac{\nu+2}{2}}}\,,$$

$$(12.)\qquad \sum \frac{z^{2p+1}}{2^{2p+1}|2} \cdot J_{(z)}^{\nu+2p+1} = \frac{z^\nu}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)} - \frac{J^{\nu}_{(z\sqrt{2})}}{2^{\frac{\nu+2}{2}}}\,,$$

welche für $\nu = 0$ sich wie folgt gestalten:

$$(11.\text{a.})\quad 2\left\{J^0_{(z)} + \frac{z^2}{2\cdot 4}\cdot J^2_{(z)} + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot J^4_{(z)} + \cdots\right\} = 1 + J^0_{(z\sqrt{2})}\,,$$

$$(12.\text{a.})\quad 2\left\{\frac{z}{2} J^1_{(z)} + \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot J^3_{(z)} + \frac{z^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot J^5_{(z)} + \cdots\right\} = 1 - J^0_{(z\sqrt{2})}\,.$$

Multiplicirt man endlich die Gleichungen der Gruppe (3. a.) der Reihe nach mit $1,\ -\frac{z}{2},\ +\frac{z^2}{2\cdot 4},\ -\frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6},\ \ldots,$ und addirt sämmtliche, mit Rücksicht darauf, dass nach (VIII. a. §. 5.)

$$1 - \frac{z^2}{2\cdot 2} + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 4} - \frac{z^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2\cdot 4\cdot 6} + \cdots = J^0_{(z)}.$$

und nach (2.) des gegenwärtigen Paragraphen:

$$J^0 - \frac{z}{2} J^1 + \frac{z^2}{2\cdot 4} J^2 - \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} J^3 + \cdots = \overset{0}{J}_{(z\sqrt{2})}$$

$$J^1 - \frac{z}{2} J^2 + \frac{z^2}{2\cdot 4} J^3 - \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} J^4 + \cdots = \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{1}{J}_{(z\sqrt{2})}$$

$$J^2 - \frac{z}{2} J^3 + \frac{z^2}{2\cdot 4} J^4 - \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} J^5 + \cdots = \frac{1}{2} \overset{2}{J}_{(z\sqrt{2})}$$

. . . .

so findet man

$$J^0_{(z)} = \overset{0}{J}_{(z\sqrt{2})} + \frac{z}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \overset{1}{J}_{(z\sqrt{2})} + \frac{z^2}{2\cdot 4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overset{2}{J}_{(z\sqrt{2})} + \cdots$$

oder

$$J^0_{(z)} = \sum \frac{z^p}{2^{p|2}} \frac{\overset{p}{J}_{(z\sqrt{2})}}{2^{\frac{p}{2}}},$$

oder auch, wenn man $z\sqrt{2}$ statt z setzt:

$$\text{(13.)} \qquad \overset{0}{J}_{(z\sqrt{2})} = \sum \frac{z^p}{2^{p|2}} \cdot J^p_{(2z)}.$$

§. 10. Entwickelung von $J^m_{(z+h)}$.

Der Taylor'sche Lehrsatz gibt

$$J^m_{(z+h)} = \sum \frac{h^p}{p!} \frac{\partial^p J^m_{(z)}}{\partial z^p}.$$

Nach Gleichung (6. §. 2.) ist aber

$$\frac{\partial^p J^m_{(z)}}{\partial z^p} = \left(\frac{1}{2}\right)^p \cdot \sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q \cdot \frac{p^{q|-1}}{q!} J^{m-p+2q}_{(z)}.$$

Setzt man diesen Werth oben ein, so kommt man auf die Doppelreihe

$$J^m_{(z+h)} = \sum\sum (-1)^q \cdot \frac{p^{q|-1}}{p!\,q!} \cdot \frac{h^p}{2^p} J^{m-p+2q}_{(z)},$$

worin q nicht grösser als p zu nehmen ist, indem die Glieder, in welchen $q > p$, von selbst verschwinden. Man kann daher vorstehende Gleichung kürzer auch so

$$J^m_{(z+h)} = \sum\sum (-1)^q \cdot \frac{h^p}{2^p\, q!\,(p-q)!} J^{m-p+2q}_{(z)}.$$

schreiben. Was den Index der Bessel'schen Function unter dem Summenzeichen betrifft, so können folgende drei Fälle eintreten. Entweder ist

$$m-p+2q=0 \quad , \quad \text{d. h. } p=m+2q\,,$$

oder $m-p+2q=r+1 \quad$, d. h. $p=m+2q-r-1\,,$

oder $m-p+2q=-r-1 \quad$, d. h. $p=m+2q+r+1\,,$

worin unter r Null oder jede positive ganze Zahl zu verstehen ist. Substituirt man diese Werthe von p in obige Gleichung, so zerfällt jene Summe in deren drei, von denen jedoch die erste nur eine einfache ist. Man erhält nämlich

$$J^m_{(z+h)} = J^0_{(z)} \sum (-1)^q \cdot \frac{h^{m+2q}}{2^{q|2}\, 2^{m+q|2}}$$
$$+ \sum \sum (-1)^q \cdot \frac{h^{m-r-1+2q}}{2^{q|2}\, 2^{m-r-1+q|2}} \cdot J^{r+1}_{(z)}$$
$$+ \sum \sum (-1)^q \cdot \frac{h^{m+r+1+2q}}{2^{q|2}\, 2^{m+r+1+q|2}} \cdot J^{-(r+1)}\,.$$

Nun ist aber, nach Gleichung (VIII. a. §. 5.)

$$\sum (-1)^q \cdot \frac{h^{m+2q}}{2^{q|2}\, 2^{m+q|2}} = J^m_{(h)}\,,$$

ferner der Coefficient von $J^{r+1}_{(z)}$

$$\sum (-1)^q \cdot \frac{h^{m-r-1+2q}}{2^{q|2}\, 2^{m-r-1+q|2}} = J^{m-r-1}_{(h)}$$

und ebenso der Coefficient von $J^{-(r+1)}_{(z)}$

$$\sum (-1)^q \cdot \frac{h^{m+r+1+2h}}{2^{q|2}\, 2^{m+r+1+q|2}} = J^{m+r+1}_{(h)}\,,$$

wo in den letzteren Summen r constant gedacht werden muss und das Summenzeichen sich also nur auf die Grösse q bezieht. Wir erhalten demnach folgende merkwürdige Gleichung

(IX. a.) $$J^m_{(z+h)} = J^m_{(h)}\, J^0_{(z)} + \Sigma\, J^{m-r-1}_{(h)}\, J^{r+1}_{(z)}$$
$$+ \Sigma\, J^{m+r+1}_{(h)}\, J^{-(r+1)}\,,$$

oder auch, weil z und h mit einander vertauscht werden dürfen

(IX. b.) $$J^m_{(z+h)} = J^0_{(h)} J^m_{(z)} + \Sigma\, J^{r+1}_{(h)}\, J^{m-r-1}_{(z)}$$
$$+ \Sigma\, J^{-(r+1)}_{(h)}\, J^{m+r+1}_{(z)}\,.$$

Für $m=0$ geht daraus hervor

(IX. c.) $$J^0_{(z+h)} = J^0_{(h)} J^0_{(z)} + 2\,\Sigma(-1)^{r+1} J^{r+1}_{(h)} J^{r+1}_{(z)}$$

oder

$$J^0_{(z+h)} = J^0_{(h)} J^0_{(z)} - 2\,J^1_{(h)} J^1_{(z)} + 2\,J^2_{(h)} \,.\, J^2_{(z)} - \\ - 2\,J^3_{(h)} J^3_{(z)} + 2\,J^4_{(h)} J^4_{(z)} - \cdots,$$

woraus wiederum für $h = z$ die folgende Gleichung

$$J^0_{(2z)} = (J^0_{(z)})^2 - 2\,(J^1_{(z)})^2 + 2\,(J^2_{(z)})^2 - 2\,(J^3_{(z)})^2 + \cdots$$

resultirt.

Ebenso würde man, nach einer leicht ersichtlichen Umformung, für $m = 1$

(IX. d.) $$J^1_{(z+h)} = \Sigma(-1)^r J^{r+1}_{(h)} J^r_{(z)} + \Sigma(-1)^r \,.\, J^r_{(h)} J^{r+1}_{(z)},$$

d. i.

$$J^1_{(z+h)} = J^1_{(h)} J^0_{(z)} - J^2_{(h)} J^1_{(z)} + J^3_{(h)} J^2_{(z)} - \cdots \\ + J^0_{(h)} J^1_{(z)} - J^1_{(h)} J^2_{(z)} + J^2_{(h)} J^3_{(z)} - \cdots$$

erhalten. U. s. w. f.

§. 11. Umformung von $J^n_{(z)}$.

Um $J^n_{(z)}$, für ein positiv ganzes n, in anderer Form als in der durch die ursprüngliche Definition gegebenen zu erhalten, gehen wir aus von der Gleichung (I., §. 1)

$$J^n_{(z)} = \frac{z^n}{\pi \cdot 1^{n|2}} \cdot \int_{-1}^{+1} e^{izu} (1-u^2)^{n-\frac{1}{2}} \cdot du\,.$$

Nun ist bekanntlich

$$\int_a^b f(u) \cdot \frac{\partial^n F(u)}{\partial u^n} \cdot du = (-1)^n \int_a^b \frac{\partial^n f(u)}{\partial u^n} \cdot F(u) \cdot du\,,$$

wenn die Function $f(u)$ so beschaffen ist, dass $f(u)$, $\frac{\partial f(u)}{\partial u}$, $\cdots$ $\frac{\partial^{n-1} f(u)}{\partial u^{n-1}}$ Null sind für $u = a$ und $u = b$. Ausserdem müssen selbstverständlich $\frac{\partial^n f(u)}{\partial u^n}$ und $\frac{\partial^n F(u)}{\partial u^n}$ innerhalb der Integrationsgrenzen endlich sein.

Nehmen wir $a = -1$, $b = +1$, $f(u) = (1-u^2)^{n-\frac{1}{2}}$, $F(u) = e^{izu}$, so sind die genannten Bedingungen erfüllt und wir erhalten

$$\int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{n-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial^n e^{izu}}{\partial u^n} \cdot du = (-1)^n \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^n (1-u^2)^{n-\frac{1}{2}}}{\partial u^n} \cdot e^{izu} du.$$

Es ist aber

$$\frac{\partial^n e^{izu}}{\partial u^n} = i^n z^n e^{izu},$$

ferner

$$\frac{\partial^{n-1} (1-u^2)^{n-\frac{1}{2}}}{\partial u^{n-1}} = (-1)^{n-1} \cdot 1^{n|2} \cdot \frac{\sin n\omega}{n}, \text{ wenn } u = \cos\omega,$$

und darum auch

$$\frac{\partial^n (1-u^2)^{n-\frac{1}{2}}}{\partial u^n} = (-1)^{n-1} \cdot 1^{n|2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\partial \sin n\omega}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u}$$
$$= (-1)^n \cdot 1^{n|2} \cdot \frac{\cos n\omega}{\sin \omega}.$$

Man erhält daher nach Substitution dieser Werthe, wenn zur Rechten $u = \cos\omega$ gesetzt wird,

$$i^n z^n \int_{-1}^{+1} e^{izu} (1-u^2)^{n-\frac{1}{2}} \,.\, du = 1^{n|2} \int_0^{\pi} e^{iz\cos\omega} \cos n\omega \,.\, d\omega,$$

oder, was dasselbe ist,

$$(1.) \qquad J^n_{(z)} = \frac{(-i)^n}{\pi} \int_0^{\pi} e^{iz\cos\omega} \cos n\omega \,.\, d\omega,$$

eine Formel, welche für jedes positiv ganze n, die Null mit inbegriffen, giltig ist.

Aus der Theorie der Fourier'schen Reihen ist bekannt, dass für jeden Werth von ψ zwischen 0 und π

$$f(\psi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\omega) \,.\, d\omega + \frac{2}{\pi} \sum \cos(p+1)\psi \int_0^{\pi} f(\omega) \cos(p+1)\omega \,.\, d\omega$$

ist. Setzen wir hierin $f(\psi) = e^{iz\cos\psi}$, so ergibt sich mit Rücksicht auf (1.):

$$(2.) \qquad e^{iz\cos\psi} = J^0_{(z)} + 2 \Sigma i^{p+1} J^{p+1}_{(z)} \,.\, \cos(p+1)\psi.$$

Daraus folgen unmittelbar die zwei Gleichungen:

$$(3.) \quad \cos(z\cos\psi) = J^0 - 2J^2 \cos 2\psi + 2J^4 \cos 4\psi - 2J^6 \cos 6\psi + \cdots$$

$$(4.) \quad \sin(z\cos\psi) = 2J^1 \cos\psi - 2J^3 \cos 3\psi + 2J^5 \cos 5\psi - 2J^7 \cos 7\psi + \cdots$$

Setzt man darin $\psi = \frac{\pi}{2} - \omega$, so hat man weiter

$$(5.)\quad \cos(z\sin\omega) = J^0 + 2J^2\cos 2\omega + 2J^4\cos 4\omega + 2J^6\cos 6\omega + \cdots$$

$$(6.)\quad \sin(z\sin\omega) = 2J^1\sin\omega + 2J^3\sin 3\omega + 2J^5\sin 5\omega + \cdots$$

Aus den beiden letzteren Gleichungen ergibt sich im Hinblick auf die Theorie der **Fourier**'schen Reihen sofort:

$$(7.)\qquad J^{2n}_{(z)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\omega)\cos 2n\omega\,.\,d\omega\,,$$

$$(8.)\qquad J^{2n+1}_{(z)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(z\sin\omega)\sin(2n+1)\omega\,.\,d\omega\,.$$

Da nun offenbar

$$0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(z\sin\omega)\sin 2n\omega\,.\,d\omega$$

und

$$0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\omega)\cos(2n+1)\omega\,.\,d\omega\,,$$

so erhält man, wenn man die erste dieser Gleichungen zu (7.), die zweite zu (8.) addirt, aus beiden die folgende Formel, welche demnach für gerade und ungerade n giltig ist:

$$(9).\qquad J^n_{(z)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\omega - n\omega)\,.\,d\omega\,.$$

Diese letztere Gleichung enthält die ursprünglich von **Bessel** gegebene Definition der Function $J^n_{(z)}$. Ich habe vorgezogen, die Eingangs gebrauchte Form als Definition zu benutzen, um den Begriff der Bessel'schen Function bequem auf beliebig reelle Werthe des Index ausdehnen zu können. Der Nutzen dieser Erweiterung wird in der Folge klar hervortreten.

Aus der Formel (1.) des gegenwärtigen Paragraphen lässt sich noch eine eigenthümliche Reductionsformel für $J^{2n}_{(z)}$ entwickeln; bekanntlich ist

$$\cos 2n\omega = \sum (-1)^p \cdot \frac{(2n)^{p|-2}\,(2n)^{p|2}}{(2p)!}\sin^{2p}\omega\,.$$

Setzt man diesen Werth in (1.) ein, nachdem man daselbst $2n$ statt n geschrieben hat, so kommt

$$J^{2n}_{(z)} = \frac{(-1)^n}{\pi} \sum (-1)^p \cdot \frac{(2n)^{p|-2}(2n)^{p|2}}{(2p)!} \int_0^\pi e^{iz\cos\omega} \sin^{2p}\omega \, . \, d\omega \, ,$$

oder

$$(10.) \qquad J^{2n}_{(z)} = (-1)^n \sum (-1)^p \cdot \frac{(2n)^{p|-2}(2n)^{p|2}}{2^{p|2}} \cdot \frac{J^p_{(z)}}{z^p} \, ,$$

eine Formel, welche $J^{2n}_{(z)}$ durch $J^0_{(z)}$, $J^1_{(z)}$, ... bis $J^n_{(z)}$ auszudrücken erlaubt. Aus ihr gehen im Einzelnen folgende Gleichungen hervor:

$$(10.a.) \begin{cases} J^0 = J^0 \\ J^2 = -J^0 + \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \frac{J^1}{z} \\ J^4 = J^0 - \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{J^1}{z} + \frac{4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6}{2 \cdot 4} \cdot \frac{J^2}{z^2} \\ J^6 = -J^0 + \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{J^1}{z} - \frac{6 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{2 \cdot 4} \cdot \frac{J^2}{z^2} + \frac{6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{J^3}{z^3} \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Die zweite derselben ist bereits in Gleichung (II.) enthalten.

§. 12. $J^n_{(z)}$ als Entwickelungscoefficient.

Die Bessel'sche Function $J^n_{(z)}$ mit ganzem Index wird auch als Coefficient der Entwickelung von $e^{\frac{1}{2}z\left(y-\frac{1}{y}\right)}$ nach (positiven und negativen) Potenzen von y definirt*). Es ist nämlich

$$e^{\frac{1}{2}zy} = \sum \frac{z^p y^p}{2^{p|2}} \, ,$$

$$e^{-\frac{z}{2y}} = \sum \frac{(-1)^q z^q y^{-q}}{2^{q|2}} \, .$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so kommt

$$e^{\frac{1}{2}z\left(y-\frac{1}{y}\right)} = \sum\sum (-1)^q \cdot \frac{z^{p+q} y^{p-q}}{2^{p|2} 2^{q|2}} \, .$$

Die Doppelsumme zur Rechten, welche sich über alle positiv ganzen Werthe von p und q von 0 bis ∞ erstreckt, zerlegen wir in drei Summen, deren erste von y frei ist, die zweite nur positive, die dritte nur negative Potenzen von y enthält, indem wir zuerst $p - q = 0$, dann $p - q = r + 1$, endlich $p - q = -(r+1)$ setzen. Dadurch wird

*) S. Schlömilch. Ueber die Bessel'sche Function. Zeitschrift für Math. u. Phys. II. Jahrgang. S. 137.

$$e^{\frac{1}{2}z\left(y-\frac{1}{y}\right)} = \sum(-1)^p \cdot \frac{z^{2p}}{(2^p|^p)^2} + \sum\sum(-1)^q \cdot \frac{z^{2q+r+1}y^{r+1}}{2^{q|2}2^{p+r+1|2}}$$
$$+ \sum\sum(-1)^{p+r+1} \cdot \frac{z^{2p+r+1}y^{-(r+1)}}{2^{p|2}2^{p+r+1|2}}.$$

Hierin ist der Coefficient von y^{r+1}:

$$\sum(-1)^q \cdot \frac{z^{2q+r+1}}{2^{q|2}2^{q+r+1|2}} = J^{r+1}_{(z)}$$

(nach Gleichung VIII. a. §. 5.), ebenso derjenige von $y^{-(r+1)}$ gleich $(-1)^{r+1}J^{r+1}_{(z)}$, während das von y unabhängige Glied nichts anderes als $J^0_{(z)}$ ist. Wir haben demnach

$$(1.)\quad e^{\frac{1}{2}z\left(y-\frac{1}{y}\right)} = J^0 + \Sigma J^{r+1} \cdot y^{r+1} + \Sigma(-1)^{r+1}J^{r+1}y^{-(r+1)}$$

und noch, wenn $-y$ statt y gesetzt wird:

$$e^{-\frac{1}{2}z\left(y-\frac{1}{y}\right)} = J^0 + \Sigma(-1)^{r+1}J^{r+1}y^{r+1} + \Sigma J^{r+1}y^{-(r+1)}$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$1 = (J^0)^2 + J^0\,\Sigma J^{r+1}y^{r+1} + J^0\,\Sigma(-1)^{r+1}J^{r+1}y^{r+1}$$
$$+ J^0\,\Sigma J^{r+1}y^{-(r+1)} + J^0\,\Sigma(-1)^{r+1}J^{r+1}y^{-(r+1)}$$
$$+ \Sigma\Sigma J^{q+1}J^{r+1}y^{q-r} + \Sigma\Sigma(-1)^{q+r}J^{q+1}J^{r+1}y^{q-r}$$
$$+ \Sigma\Sigma(-1)^{q+1}J^{q+1}J^{r+1}y^{q+r+2}$$
$$+ \Sigma\Sigma(-1)^{q+1}J^{q+1}J^{r+1}y^{-(q+r+2)},$$

oder, indem man in geeigneter Weise zusammenfasst:

$$1 = (J^0)^2 + 2J^0\,\Sigma J^{2r+2}y^{2r+2} + 2J^0\,\Sigma J^{2r+2}y^{-(2r+2)}$$
$$+ 2\,\Sigma\Sigma J^{q+1}J^{r+1}y^{q-r}$$
$$+ \Sigma\Sigma(-1)^{q+1}J^{q+1}J^{r+1}y^{q+r+2}$$
$$+ \Sigma\Sigma(-1)^{q+1}J^{q+1}J^{r+1}y^{-(q+r+2)},$$

wo in der ersten Doppelsumme, nämlich in

$$2\,\Sigma\Sigma J^{q+1}J^{r+1}y^{q-r}$$

die ganzzahligen Werthe von q und r so zu wählen sind, dass ihre Summe eine gerade Zahl gibt. Dann muss aber auch ihre Differenz $q-r$ positiv oder negativ gerade (oder Null) sein. Zerfällen wir dieselbe in 3 Summen, deren erste von y unabhängig ist, die zweite nur positive, die dritte nur negative Potenzen von y enthält, indem wir ähnlich wie oben zuerst $q - r = 0$, dann

$q - r = 2p + 2$, endlich $q - r = -(2p+2)$ setzen, so haben wir

$$2\,\Sigma\Sigma\, J^{q+1}\, J^{r+1}\, y^{q-r} = 2\,\Sigma\,(J^{q+1})^2 + 2\,\Sigma\Sigma\, J^{r+1}\, J^{r+2p+3}\, y^{2p+2} + 2\,\Sigma\Sigma\, J^{q+1}\, J^{q+2p+3}\, y^{-(2p+2)}.$$

Was die beiden letzten obigen Doppelsummen anlangt, so können auch sie nur gerade Potenzen von y enthalten, indem die Summe

$$\Sigma(-1)^{q+1}\, J^{q+1}\, J^{r+1} \qquad (q + r = 2p + 1)$$

für ein ungerades $q + r$ identisch Null ist. Setzen wir daher auch dort $q + r = 2p$, so haben wir schliesslich:

$$\begin{aligned} 1 = (J^0)^2 &+ 2\,\Sigma\,(J^{q+1})^2 + 2\,J^0\,\Sigma\, J^{2p+2}\, y^{2p+2} \\ &+ 2\,\Sigma\Sigma J^{r+1} J^{r+2p+3}\, y^{2p+2} + \Sigma\Sigma(-1)^{q+1} J^{q+1}\, J^{2p-q+1}\, y^{2p+2} \\ &+ 2\,J^0\,\Sigma J^{2p+2}\, y^{-(2p+2)} + 2\,\Sigma\Sigma\, J^{q+1}\, J^{q+2p+3}\, y^{-(2p+2)} \\ &+ \Sigma\Sigma(-1)^{q+1}\, J^{q+1}\, J^{2p-q+1}\, y^{-(2p+2)}. \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für jedes y gelten muss, so ist das absolute Glied zur Rechten nothwendig gleich 1. Man hat daher die bemerkenswerthe Gleichung*)

$$(2.)\quad (J^0)^2 + 2\,(J^1)^2 + 2\,(J^2)^2 + 2\,(J^3)^2 + \cdots = 1\,.$$

Ausserdem muss der Coefficient einer jeden Potenz von y verschwinden. Heben wir den Coefficienten von y^{2m+2} heraus, so lautet derselbe

$$2\,J^0\, J^{2m+2} + 2\sum_{r=0}^{r=\infty} J^{r+1}\, J^{r+2m+3} + \sum_{q=0}^{q=2m}(-1)^{q+1}\, J^{q+1}\, J^{2m+1-q}\,.$$

Der ersten Summe, in welcher r alle ganzen Werthe von 0 bis ∞ annimmt, kann augenscheinlich das vorausgehende Glied als Anfangsglied einverleibt werden. In der zweiten Summe, deren Gliederzahl stets ungerade ist, sind je zwei gleichweit von der Mitte abstehende Glieder einander gleich. Sondert man daher ihr Mittelglied ab, so kann man sie in folgender Weise schreiben:

$$\begin{aligned} &\sum_{q=0}^{q=2m}(-1)^{q+1}\, J^{q+1}\, J^{2m+1-q} \\ &= (-1)^{m+1}\,(J^{m+1})^2 + 2\sum_{q=0}^{q=m-1}(-1)^{q+1}\, J^{q+1}\, J^{2m+1-q}\,. \end{aligned}$$

---

*) Hansen. Ermittelung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung. 1. Theil. Schriften der Sternwarte Seeberg. S. 101.

Man gelangt [illegible], wenn man den Coefficienten von y^{2n+2} [illegible] Null setzt, zu der Gleichung:

$$[illegible] \; 2\sum [illegible] = [illegible] + 2\sum_{q=0}^{q=n-1} (-1)^q J^{q+1} J^{2n+1-q}.$$

Daraus ergibt sich speciell

$$2\sum [illegible] = [illegible]$$

$$2\sum [illegible] = - [illegible] - 2 J^1 J^3$$

$$2\sum [illegible] = [illegible] - 2 J^1 J^5 - 2 J^2 J^4$$

$$2\sum [illegible] = - [illegible] + 2 J^1 J^7 - 2 J^2 J^6 + 2 J^3 J^5$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Der Coefficient von y^{-2n-2} der Null gleichgesetzt, würde zur [illegible] Gleichung (3) führen.

Nun werde in Gleichung [illegible] $2z$ statt z gesetzt, so hat man

$$[illegible] = [illegible] - \sum [illegible] . y^{r+1} + \sum (-1)^{r+1} J_{(2z)}^{r+1} . y^{-(r+1)}$$

und wenn man dieselbe Reihe ins Quadrat erhebt:

$$= [illegible] - 2 [illegible] \sum [illegible] . y^{p+1} + 2 J_{(z)}^0 \sum (-1)^{p+1} J^{p+1} . y^{-(p+1)}$$

$$+ \sum\sum [illegible] - \sum\sum (-1)^{p+q+2} J_{(z)}^{p+1} J_{(z)}^{q+1} . y^{-(p+q+2)}$$

$$- 2\sum\sum [illegible] . y^{p-q}.$$

Was die letztere Doppelreihe anlangt, so zerfällen wir dieselbe in drei Summen, deren erstere von y unabhängig ist, während die zweite nur positive, die dritte nur negative Potenzen von y enthält, indem wir zuerst $p - q = 0$, dann $p - q = r + 1$ und endlich [illegible] $= - r - 1$ setzen. Dadurch nimmt vorstehende Gleichung die folgende Gestalt an:

$$(5.) \quad [illegible] - 2\sum (-1)^{p+1} (J_{(z)}^{p+1})^2 + 2 J_{(z)}^0 \sum J_{(z)}^{p+1} . y^{p+1}$$

$$+ \sum\sum [illegible] . y^{[illegible]} + 2\sum\sum (-1)^{q+1} J_{(z)}^{q+r+2} J_{(z)}^{q+1} . y^{r+1}$$

$$+ 2 [illegible] \sum [illegible] y^{-(p+1)} + \sum\sum (-1)^{p+q+2} J_{(z)}^{p+1} J_{(z)}^{q+1} . y^{-(p+q+2)}$$

$$+ 2\sum\sum [illegible] J_{(z)}^{p+1} J_{(z)}^{p+r+2} y^{-(r+1)}.$$

Vergleicht man hier die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von y mit denjenigen der gleichhohen Potenzen von y in Formel (4), so erhält man zunächst folgende zwei Gleichungen:*)

*) Hansen, l. c.

(6.) $J^0_{(2z)} = (J^0_{(z)})^2 - 2(J^1_{(z)})^2 + 2(J^2_{(z)})^2 - 2(J^3_{(z)})^2 + \cdots$

(7.) $J^1_{(2z)} = 2J^0_{(z)}J^1_{(z)} - 2J^1_{(z)}J^2_{(z)} + 2J^2_{(z)}J^3_{(z)} - 2J^3_{(z)}J^4_{(z)} + \cdots,$

welche übrigens aus §. 10. bereits bekannt sind.

Die erstere kann durch Combination mit der Gleichung

$$1 = (J^0_{(z)})^2 + 2(J^1_{(z)})^2 + 2(J^2_{(z)})^2 + 2(J^3_{(z)})^2 + \cdots$$

nach Belieben in die eine oder die andere der beiden folgenden Formen gebracht werden:

(6.a.) $J^0_{(2z)} = -1 + 2(J^0_{(z)})^2 + 4(J^2_{(z)})^2 + 4(J^4_{(z)})^2 + \cdots$

(6.b.) $J^0_{(2z)} = 1 - 4(J^1_{(z)})^2 - 4(J^3_{(z)})^2 - 4(J^5_{(z)})^2 + \cdots.$

Vergleicht man überhaupt in den Gleichungen (4. und 5.) die Coefficienten von y^{r+2}, so erhält man allgemein

$$(8.)\quad J^{r+2}_{(2z)} = \sum_{p=0}^{p=r} J^{p+1}_{(z)}\, J^{r-p+1}_{(z)} + 2\sum(-1)^p \,.\, J^p_{(z)} \,.\, J^{p+r+2}_{(z)}\,,$$

wo die erstere Summe eine blos endliche, die zweite aber eine endlose ist. Speciell würde daraus hervorgehen:

$$(8.a.)\quad \begin{cases} J^2_{(2z)} = (J^1_{(z)})^2 + 2J^0_{(z)}J^2_{(z)} + 2J^1_{(z)}J^3_{(z)} + 2J^2_{(z)}J^4_{(z)} - \cdots \\ J^3_{(2z)} = 2J^1_{(z)}J^2_{(z)} + 2J^0_{(z)}J^3_{(z)} - 2J^1_{(z)}J^4_{(z)} + 2J^2_{(z)}J^5_{(z)} - \cdots \\ J^4_{(2z)} = (J^2_{(z)})^2 + 2J^1_{(z)}J^3_{(z)} + 2J^0_{(z)}J^4_{(z)} - 2J^1_{(z)}J^5_{(z)} \\ \qquad\qquad + 2J^2_{(z)}J^6_{(z)} - \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Indem man in Gleichung (1.) mz statt z setzen, und sie dann auch noch mit m potenziren würde, könnte man auf dieselbe Weise Multiplikationsformeln für $J^r_{(mz)}$ gewinnen. Dieselben sind aber so zusammengesetzt, dass wir ihre Entwickelung lieber unterlassen.

§. 13. Reihen, welche nach Bessel'schen Functionen fortschreiten.

Wir multipliciren die Gleichung (II. a. §. 1.) mit irgend einer Function $f(\nu)$ von ν, so dass sie die Gestalt

$$\frac{2}{z} \cdot \nu f(\nu) \,.\, J^\nu = f(\nu)\, J^{\nu-1} + f(\nu)\, J^{\nu+1} \text{ annimmt,}$$

setzen sodann statt ν nach und nach $\nu+2$, $\nu+4$, $\nu+6$, ..., $\nu+2p$, ..., und addiren sämmtliche so erhaltenen Gleichungen bis in's Unendliche. Das Resultat dieser Operation ist die Gleichung

$$\frac{2}{z}\sum (\nu+2p)\, f(\nu+2p)\, J^{\nu+2p}$$
$$= f(\nu)\, J^{\nu-1} + \Sigma\left(f(\nu+2p) + f(\nu+2p+2)\right)\cdot J^{\nu+2p+1}\ .$$

Setzt man nun

$$(\alpha.)\qquad f(\nu) = (\nu+1)^{n|2}\,(\nu-1)^{n|-2}\ ,$$

so ist

$$\begin{aligned} f(\nu+2p) + f(\nu+2p+2) &= (\nu+2p+1)^{n|2}\,(\nu+2p-1)^{n|-2} \\ &+ (\nu+2p+3)^{n|2}\,(\nu+2p+1)^{n|-2} \\ &= (\nu+2p+1)^{n|2}\,(\nu+2p-1)^{n-1|-2}\,(\nu+2p+1-2n) \\ &+ (\nu+2p+1)^{n|2}\,(\nu+2p+1+2n)\,(\nu+2p-1)^{n-1|-2} \\ &= (\nu+2p+1)^{n|2}\,(\nu+2p-1)^{n-1|-2}\,(2\nu+4p+2) \\ &= 2\,(\nu+2p+1)^{n|2}\,(\nu+2p+1)^{n|-2}\ . \end{aligned}$$

Setzen wir zweitens

$$(\beta.)\qquad f(\nu) = \nu^{n+1|2}\,(\nu-2)^{n|-2}\ ,$$

so finden wir ebenso

$$\begin{aligned} f(\nu+2p) + f(\nu+2p+2) &= (\nu+2p)^{n+1|2}\,(\nu+2p-2)^{n|-2} \\ &+ (\nu+2p+2)^{n+1|2}\,(\nu+2p)^{n|-2} \\ &= (\nu+2p+2)^{n|2}\,(\nu+2p)^{n|-2}\,(\nu+2p-2n) \\ &+ (\nu+2p+2)^{n|2}(\nu+2p+2+2n)\,(\nu+2p)^{n|-2} \\ &= (\nu+2p+2)^{n|2}\,(\nu+2p)^{n|-2}\,(2\nu+4p+2) \\ &= 2\,(\nu+2p+1)\,(\nu+2p+2)^{n|2}\,(\nu+2p)^{n|-2}\ . \end{aligned}$$

Substituirt man jetzt diese Werthe in (1.) so gelangt man zu folgenden zwei Gleichungen

$$(1.)\qquad \frac{2}{z}\sum (\nu+2p)\,(\nu+2p+1)^{n|2}\,(\nu+2p-1)^{n|-2}\,J^{\nu+2p}$$
$$= (\nu+1)^{n|2}\,(\nu-1)^{n|-2}J^{\nu-1} + 2\,\Sigma\,(\nu+2p+1)^{n|2}\,(\nu+2p+1)^{n|-2}J^{\nu+2p+1}\ ,$$

und

$$(2.)\qquad \frac{2}{z}\sum (\nu+2p)^{n+1|2}\,(\nu+2p)^{n+1|-2}\,J^{\nu+2p}$$
$$= \nu^{n+1|2}(\nu-2)^{n|-2}J^{\nu-1} + 2\,\Sigma\,(\nu+2p+1)\,(\nu+2p+2)^{n|2}(\nu+2p)^{n|-2}\,.\,J^{\nu+2p+1}\ .$$

Sondern wir nun von der Summe zur Linken in Gleichung (1.) das erste Glied ab, indem wir zuerst $p=0$, dann $p+1$ statt p setzen, schreiben wir ferner in Gleichung (2.) $\nu+1$ statt ν, so lauten dieselben, sofern man noch zur Abkürzung

$$\Sigma\,(\nu+2p+1)^{n|2}\,(\nu+2p+1)^{n|-2}\,J^{\nu+2p+1} = A^n_{(\nu)}$$
$$\Sigma\,(\nu+2p+2)\,(\nu+2p+3)^{n|2}\,(\nu+2p+1)^{n|-2}\,J^{\nu+2p+2} = B^n_{(\nu)}$$

setzt, wie folgt, und zwar die erstere

$$\frac{2\nu}{z}(\nu+1)^{n|2}(\nu-1)^{n|-2}J^{\nu}+\frac{2}{z}B^n_{(\nu)}=(\nu+1)^{n|2}(\nu-1)^{n|-2}J^{\nu-1}+2A^n_{(\nu)}$$

oder besser, wenn zur Linken $\frac{2\nu}{z}J^{\nu-1}$ durch die Summe $J^{\nu-1}+J^{\nu+1}$ ersezt wird:

$$(1.\text{a.})\qquad (\nu+1)^{n|2}\,(\nu-1)^{n|-2}\,J^{\nu+1}+\frac{2}{z}B^n_{(\nu)} = 2A^n_{(\nu)}\,.$$

Ebenso die letztere

$$(2.\text{a.})\qquad \frac{2}{z}A^{n+1}_{(\nu)} = (\nu+1)^{n+1|2}\,(\nu-1)^{n|-2}\,J^{\nu}+2B^n_{(\nu)}\,.$$

Addirt man beide Gleichungen, nachdem die erstere mit z multiplicirt worden, so findet man

$$\frac{2}{z}\cdot A^{n+1}_{(\nu)}+z\,(\nu+1)^{n|2}(\nu-1)^{n|-2}J^{\nu+1}$$
$$=2zA^n_{(\nu)}+(\nu+1)^{n+1|2}(\nu-1)^{n|-2}J^{\nu}\,,$$

oder auch

$$\frac{2}{z^2}\cdot A^{n+1}_{(\nu)}-2A^n_{(\nu)}$$
$$=(\nu+1)^{n+1|2}\,(\nu-1)^{n|-2}\cdot\frac{J^{\nu}}{z}-(\nu+1)^{n|2}\,(\nu-1)^{n|-2}\,J^{\nu+1}\,.$$

Setzt man darin nach und nach $n+1,\ n+2,\ \ldots,\ n+m-1$ statt n, dividirt die so entstandenen Gleichungen der Reihe nach durch $z^2,\ z^4,\ \ldots,\ z^{2(m-1)}$ und addirt sie zur vorstehenden, so erhält man

$$\frac{2}{z^{2m}}A^{n+m}_{(\nu)}-2A^n_{(\nu)}$$
$$=J^{\nu}\sum_{p=0}^{p=m-1}\frac{(\nu+1)^{n+p+1|2}(\nu-1)^{n+p|-2}}{z^{2p+1}}-J^{\nu+1}\sum_{p=0}^{p=m-1}\frac{(\nu+1)^{n+p|2}(\nu-1)^{n+p|-2}}{z^{2p}}\,,$$

oder, wenn man darin $n=0$ annimmt, und beiderseits mit z^{2m} multiplicirt:

$$(3.)\qquad 2A^m_{(\nu)} = 2z^{2m}A^0_{(\nu)}+J^{\nu}\sum_{p=0}^{p=m-1}(\nu+1)^{p+1|2}(\nu-1)^{p|-2}z^{2m-2p-1}$$
$$-J^{\nu+1}\sum_{p=0}^{p=m-1}(\nu+1)^{p|2}(\nu-1)^{p|-2}z^{2m-2p}$$

und noch, vermöge (2.a.)

$$(4.)\quad 2\,B^{m}_{(\nu)} = 2\,z^{2m+1}\,A^{0}_{(\nu)} + J^{\nu}\sum_{p=0}^{p=m-1}(\nu+1)^{p+1|2}\,(\nu-1)^{p|-2}\,z^{2m-2p}$$
$$- J^{\nu+1}\sum_{p=0}^{p=m}(\nu+1)^{p|2}(\nu-1)^{p|-2}\,z^{2m-2p+1}.$$

Diese beiden Gleichungen erlauben, die nach Bessel'schen Functionen fortschreitenden Reihen $A^{m}_{(\nu)}$ und $B^{m}_{(\nu)}$ durch J^{ν} und $J^{\nu+1}$ und die einfachste derartige Reihe

$$A^{0}_{(\nu)} = \Sigma\,J^{\nu+2p+1} = J^{\nu+1} + J^{\nu+3} + J^{\nu+5} + J^{\nu+7} + \cdots$$

auszudrücken.

Setzt man in beiden Gleichungen $\nu = -1$, so verschwindet in jeder derselben die erste Summe zur Rechten völlig, während die zweite sich auf ihr erstes Glied reducirt, so dass man hat

$$2\,A^{m}_{(-1)} = z^{2m}\,(2\,A^{0}_{(-1)} - J^{0}),$$
$$2\,B^{m}_{(-1)} = z^{2m+1}\,(2\,A^{0}_{(-1)} - J^{0}).$$

Hier ist

$$2\,A^{0}_{(-1)} - J^{0} = 2\,\Sigma\,J^{2p} - J^{0}$$
$$= J^{0} + 2\,J^{2} + 2\,J^{4} + 2\,J^{6} + \cdots.$$

Aus der Gleichung (5.) des §. 11. ergibt sich aber für $\omega = 0$:

$$J^{0} + 2\,J^{2} + 2\,J^{4} + 2\,J^{6} + \cdots = 1.$$

Wir haben demnach

$$2\,A^{m}_{(-1)} = z^{2m}$$
$$2\,B^{m}_{(-1)} = z^{2m+1},$$

oder:

$$(5.)\qquad 2\,\Sigma\,(2p)^{m|2}\,(2p)^{m|-2}\,J^{2p} = z^{2m},$$

$$(6.)\qquad 2\,\Sigma\,(2p+1)\,(2p+2)^{m|2}\,(2p)^{m|-2}\,J^{2p+1} = z^{2m+1}.$$

In der ersten dieser Gleichungen darf man nur dann $m = 0$ setzen, wenn man nicht vergisst von dem ersten Gliede der Reihe nur die Hälfte zu nehmen, die andere aber lässt für m ohne Weiteres jeden Werth von 0 bis ∞ zu.

Specialisiren wir diese beiden Formeln, so erhalten wir folgende Gruppe von Gleichungen, wodurch sämmtliche positiv ganzen Potenzen von z nach Bessel'schen Functionen entwickelt sind:

$$
(5.\mathrm{a.})\quad \begin{cases}
J^0 + 2\,J^2 + 2\,J^4 + 2\,J^6 + \cdots & = 1 \\
2\,(2^2\,J^2 + 4^2\,J^4 + 6^2\,J^6 + \cdots) & = z^2 \\
2\,(4.6.4.2\,J^4 + 6.8.6.4\,J^6 + 8.10.8.6\,J^8 + \cdots) & = z^4 \\
2\,(6.8.10.6.4.2\,J^6 + 8.10.12.8.6.4\,J^8 + \cdots) & = z^6 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

$$
(6.\mathrm{a.})\quad \begin{cases}
2\,(J^1 + 3\,J^3 + 5\,J^5 + 7\,J^7 + \cdots) & = z \\
2\,(3.4.2\,J^3 + 5.6.4\,J^5 + 7.8.6\,J^7 + \cdots) & = z^3 \\
2\,(5.6.8.4.2\,J^5 + 7.8.10.6.4\,J^7 + \cdots) & = z^5 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

Auf die erste Gleichung der Gruppe (6.a.) würde man auch kommen, wenn man die Gleichung (6.) des §. 11. nach ω differentiirte und dann $\omega = 0$ setzte.

Wenn man die aus

$$\frac{2\nu}{z} f(\nu) \,.\, J^{\nu} = f(\nu)\, J^{\nu-1} + f(\nu) \,.\, J^{\nu+1}$$

durch successive Substitution von $\nu + 2$, $\nu + 4$, ..., $\nu + 2p$ statt ν hervorgehenden Gleichungen abwechselnd mit entgegengesetzten Vorzeichen versieht und dann addirt, so erhält man zunächst

$$\frac{2}{z} \sum (-1)^p \,.\, (\nu+2p)\, f(\nu+2p)\, J^{\nu+2p} = f(\nu) \,.\, J^{\nu-1}$$
$$- \Sigma (-1)^p \left(f(\nu+2p+2) - f(\nu+2p)\right) J^{\nu+2p+1}\,.$$

Setzt man wieder zuerst

$$f(\nu) = (\nu+1)^{n|2}\, (\nu-1)^{n|-2}\,,$$

sodann

$$f(\nu) = \nu^{n+1|2}\, (\nu-2)^{n|-2}\,,$$

so ist im ersten Falle

$$f(\nu+2p+2) - f(\nu+2p) = 4n\,(\nu+2p+1)^{n|2}\, (\nu+2p-1)^{n-1|-2}\,,$$

im zweiten aber

$$f(\nu+2p+2) - f(\nu+2p) = 2\,(2n+1)\,(\nu+2p+2)^{n|2} (\nu+2p)^{n|-2}\,.$$

Man hat demnach, wenn man diese Werthe oben einsetzt, folgende zwei Gleichungen

$$(7.)\quad \frac{2}{z} \sum (-1)^p\, (\nu+2p)\, (\nu+2p+1)^{n|2}\, (\nu+2p-1)^{n|-2}\, J^{\nu+2p}$$
$$= (\nu+1)^{n|2} (\nu-1)^{n|-2} J^{\nu-1} - 2\,.\,2n\, \Sigma (-1)^p (\nu+2p+1)^{n|2} (\nu+2p-1)^{n-1|-2} J^{\nu+2p+1}\,,$$

$$(8.)\quad \frac{2}{z} \sum (-1)^p \,.\, (\nu+2p)^{n+1|2}\, (\nu+2p)^{n+1|-2}\, J^{\nu+2p}$$
$$= \nu^{n+1|2} (\nu-2)^{n|-2} J^{\nu-1} - 2\,(2n+1)\, \Sigma (-1)^p\, (\nu+2p+2)^{n|2}\, (\nu+2p)^{n|-2} J^{\nu+2p+1}\,.$$

Obschon diese Gleichungen einer Behandlung, wie sie oben an den Gleichungen (1.) und (2.) geübt wurde, nicht fähig sind, liefern sie dennoch eine Reihe interessanter Relationen. Setzt man z. B. in (7.) $n = 0$, so hat man

$$2\,\Sigma\,(-1)^p\,(\nu+2p)\,J^{\nu+2p} = z\,J^{\nu-1} \tag{9.}$$

und daraus speciell

$$(9.a.)\quad \begin{cases} 2\,(J^1 - 3\,J^3 + 5\,J^5 - 7\,J^7 + \cdots) = z\,J^0 \\ 2\,(2\,J^2 - 4\,J^4 + 6\,J^6 - 8\,J^8 + \cdots) = z\,J^1 \\ 2\,(3\,J^3 - 5\,J^5 + 7\,J^7 - 9\,J^9 + \cdots) = z\,J^2 \\ 2\,(4\,J^4 - 6\,J^6 + 8\,J^8 - 10\,J^{10} + \cdots) = z\,J^3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Diese Gleichungen, durch welche jede Bessel'sche Function selbst wieder nach Bessel'schen Functionen entwickelt ist, hätte man natürlich, da ja für $n = 0$ das erste $f(\nu) = 1$ ist, auch erhalten, wenn man die aus der Gleichung (II.) durch Einsetzen von $\nu + 2$, $\nu + 4$, ..., $\nu + 2p$, ... hervorgehenden Gleichungen mit abwechselnden Vorzeichen addirt hätte.

Setzt man ferner in (7.) $n = 1$, so wird

$$\frac{2}{z}\sum(-1)^p\,(\nu+2p-1)\,(\nu+2p)\,(\nu+2p+1)\,J^{\nu+2p}$$
$$= (\nu+1)\,(\nu-1)\,J^{\nu-1} - 2\,.\,2\,\Sigma\,(-1)^p\,(\nu+2p+1)\,J^{\nu+2p+1}\,.$$

Nach (9.) ist aber

$$2\,\Sigma\,(-1)^p\,(\nu+2p+1)\,J^{\nu+2p+1} = z\,J^\nu\,,$$

folglich hat man

$$(10.)\quad 2\,\Sigma\,(-1)^p\,.\,(\nu+2p-1)\,(\nu+2p)\,(\nu+2p+1)\,J^{\nu+2p}$$
$$= z\,.\,(\nu+1)\,(\nu-1)\,J^{\nu-1} - 2\,z^2\,J^\nu\,,$$

also z. B. für $\nu = 1$ u. 2:

$$(10.a.)\begin{cases} 2\,(2.3.4\,J^3 - 4.5.6\,J^5 + 6.7.8\,J^7 - 8.9.10\,J^9 + \cdots) = -2\,z^2\,J^1 \\ 2\,(1.2.3\,J^2 - 3.4.5\,J^4 + 5.6.7\,J^6 - 7.8.9\,J^8 + \cdots) = 3z\,J^1 - 2z^2\,J^2. \end{cases}$$

Aus (8.) folgt für $n = 0$:

$$\frac{2}{z}\sum(-1)^p\,(\nu+2p)^2\,J^{\nu+2p} = \nu\,J^{\nu-1} - 2\sum(-1)^p\,J^{\nu+2p+1}\,.$$

Für $\nu = 1$ ist nun die rechte Seite

$$J^0 - 2\,(J^2 - J^4 + J^6 - J^8 + \cdots)$$

und für $\nu = 2$:

$$2\,J^1 - 2\,(J^3 - J^5 + J^7 - + \cdots)\,.$$

Setzt man aber in den Gleichungen (3.) und (4.) des §. 11. $\psi = 0$, so kommt:

$$(11.)\quad \begin{cases} J^0 - 2\,J^2 + 2\,J^4 - 2\,J^6 + \cdots = \cos z \\ 2\,(J^1 - J^3 + J^5 - J^7 + \cdots) = \sin z\,. \end{cases}$$

Demnach hat man auch

$$\frac{2}{z} \sum (-1)^p\,(2p+1)^2\,J^{2p+1} = \cos z$$

und

$$\frac{2}{z} \sum (-1)^p\,(2p+2)^2\,J^{2p+2} = \sin z\,,$$

oder

$$(12.)\quad \begin{cases} 2\,(J^1 - 3^2\,J^3 + 5^2\,J^5 - 7^2\,J^7 + \cdots) = z \cos z \\ 2\,(2^2\,J^2 - 4^2\,J^4 + 6^2\,J^6 - 8^2\,J^8 + \cdots) = z \sin z\,. \end{cases}$$

Endlich sei noch bemerkt, dass, wenn man zur Gleichung

$$J^0 + 2\,J^2 + 2\,J^4 + 2\,J^6 + \cdots = 1$$

die erste Gleichung der Gruppe (11.), nämlich

$$J^0 - 2\,J^2 + 2\,J^4 - 2\,J^6 + \cdots = \cos z$$

addirt, oder davon subtrahirt, noch folgende zwei Gleichungen hervorgehen:

$$(13.)\quad \begin{cases} J^0 + 2\,J^4 + 2\,J^8 + 2\,J^{12} + \cdots = \cos^2 \tfrac{1}{2} z \\ 2\,J^2 + 2\,J^6 + 2\,J^{10} + 2\,J^{14} + \cdots = \sin^2 \tfrac{1}{2} z\,. \end{cases}$$

§. 14. Fortsetzung.

Wir gehen jetzt von der Gleichung (5. §. 3.) aus, und multipliciren dieselbe mit $f(\mu)$; dieselbe lautet alsdann

$$2\,f(\mu) \cdot \frac{\partial J^\nu}{\partial z} = f(\mu)\,J^{\nu-1} - f(\mu)\,J^{\nu+1}\,,$$

Hierin setzen wir nach und nach $\mu + 2\,,\ \mu + 4\,, \ldots,\ \mu + 2p$ statt μ und gleichzeitig resp. $\nu + 2\,,\ \nu + 4\,, \ldots,\ \nu + 2p$ statt ν. Durch Addition sämmtlicher einzelner Gleichungen erhalten wir

$$2\,\frac{\partial}{\partial z} \sum f(\mu+2p)\,J^{\nu+2p} = f(\mu)\,J^{\nu-1} + \Sigma\big(f(\mu+2p+2) - f(\mu+2p)\big)\,J^{\nu+2p+1}.$$

Nehmen wir nun wieder zuerst

$$f(\mu) = (\mu+1)^{n|2}\,(\mu-1)^{n|-2}\,,$$

ferner

$$f(\mu) = (\mu+1)^{n+1|2}\,(\mu-1)^{n|-2}\,,$$

so dass einmal

$$f(\mu+2p+2) - f(\mu+2p) = 4n\,(\mu+2p+1)^{n|2}\,(\mu+2p-1)^{n-1|-2}$$

und dann noch

$$f(\mu+2p+2)-f(\mu+2p)=2(2n+1)(\mu+2p+3)^{n|2}(\mu+2p+1)^{n|-2}$$

wird, so gelangen wir zu folgenden zwei Gleichungen:

$$(1.)\quad 2\frac{\partial}{\partial z}\sum(\mu+2p+1)^{n|2}(\mu+2p-1)^{n|-2}J^{\nu+2p}$$
$$=(\mu+1)^{n|2}(\mu-1)^{n|-2}J^{\nu-1}+2.2n\,\Sigma\,(\mu+2p+1)^{n|2}(\mu+2p-1)^{n-1|-2}J^{\nu+2p+1}$$

und

$$(2.)\quad 2\frac{\partial}{\partial z}\sum(\mu+2p+1)^{n+1|2}(\mu+2p-1)^{n|-2}J^{\nu+2p}$$
$$=(\mu+1)^{n+1|2}(\mu-1)^{n|-2}J^{\nu-1}+2(2n+1)\,\Sigma\,(\mu+2p+3)^{n|2}(\mu+2p+1)^{n|-2}J^{\nu+2p+1}\,.$$

Von der Summe zur Linken in der ersten Gleichung trennen wir das erste Glied dadurch ab, dass wir zuerst $p=0$, dann $p+1$ statt p setzen; in der zweiten Gleichung dagegen schreiben wir $\nu+1$ statt ν, wodurch die beiden Gleichungen folgende Gestalt annehmen:

$$2(\mu+1)^{n|2}(\mu-1)^{n|-2}\frac{\partial J^{\nu}}{\partial z}+2\frac{\partial}{\partial z}\sum(\mu+2p+3)^{n|2}(\mu+2p+1)^{n|-2}J^{\nu+2p+2}$$
$$=(\mu+1)^{n|2}(\mu-1)^{n|-2}J^{\nu-1}+2.2n\,\Sigma(\mu+2p+1)^{n|2}(\mu+2p-1)^{n-1|-2}J^{\nu+2p+1}$$

$$2\frac{\partial}{\partial z}\sum(\mu+2p+1)^{n+1|2}(\mu+2p-1)^{n|-2}J^{\nu+2p+1}=(\mu+1)^{n+1|2}(\mu-1)^{n|-2}J^{\nu}$$
$$+\,2.(2n+1)\,\Sigma\,(\mu+2p+3)^{n|2}(\mu+2p+1)^{n|-2}J^{\nu+2p+2}\,.$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\Sigma\,(\mu+2p+1)^{n|2}(\mu+2p-1)^{n-1|-2}J^{\nu+2p+1}=C^{n}_{(\mu)}\,,$$
$$\Sigma\,(\mu+2p+3)^{n|2}(\mu+2p+1)^{n|-2}J^{\nu+2p+2}=D^{n}_{(\mu)}\,,$$

so lauten vorstehende Gleichungen folgendermassen:

$$(3.)\left\{\begin{aligned}&2(\mu+1)^{n|2}(\mu-1)^{n|-2}\frac{\partial J^{\nu}}{\partial z}+2\frac{\partial D^{n}_{(\mu)}}{\partial z}=(\mu+1)^{n|2}(\mu-1)^{n|-2}J^{\nu-1}+2.2n\,C^{n}_{(\mu)}\\&2\frac{\partial C^{n+1}_{(\mu)}}{\partial z}=(\mu+1)^{n+1|2}(\mu-1)^{n|-2}J^{\nu}+2(2n+1)D^{n}_{(\mu)}\,.\end{aligned}\right.$$

Wird die erstere mit $2n+1$ multiplicirt, die zweite nach z differentiirt, und werden beide sodann addirt, so ergibt sich:

$$2\frac{\partial^2 C^{n+1}_{(\mu)}}{\partial z^2}=(\mu+1)^{n|2}(\mu-1)^{n+1|-2}\frac{\partial J^{\nu}}{\partial z}+(2n+1)(\mu+1)^{n|2}(\mu-1)^{n|-2}J^{\nu-1}$$
$$+\,2.2n(2n+1)\,C^{n}_{(\mu)}\,,$$

oder nach einer leicht ersichtlichen Umformung

$$(4.)\quad 2\frac{\partial^2 C^{n+1}_{(\mu)}}{\partial z^2}=\tfrac{1}{2}(\mu+1)^{n+1|2}(\mu-1)^{n|-2}J^{\nu-1}$$
$$-\,\tfrac{1}{2}(\mu+1)^{n|2}(\mu-1)^{n+1|-2}J^{\nu+1}+2.2n(2n+1)\,C^{n}_{(\mu)}\,.$$

Daraus folgt zunächst für $n=0$

$$(5.)\qquad 2\cdot\frac{\partial^2 C^1_{(\mu)}}{\partial z^2} = \tfrac{1}{2}(\mu+1)J^{\nu-1} - \tfrac{1}{2}(\mu-1)J^{\nu+1}$$

oder

$$(5.)\quad 2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\sum(\mu+2p+1)J^{\nu+2p+1} = \tfrac{1}{2}(\mu+1)J^{\nu-1} - \tfrac{1}{2}(\mu-1)J^{\nu+1}.$$

Setzt man darin nach einander $\mu=1$, $\mu=-1$, so hat man

$$(5.\text{a.})\qquad 2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\sum(2p+2)J^{\nu+2p+1} = J^{\nu-1},$$

$$(5.\text{b.})\qquad 2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\sum 2p\,.\,J^{\nu+2p+1} = J^{\nu+1},$$

woraus noch specieller folgen würde:

$$2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\sum(2p+2)J^{2p+2} = J^0,$$

$$2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\sum(2p+2)J^{2p+3} = J^1.$$

Da nun nach Formel (3. §. 6.)

$$\int_0^z J^1 dz = 1 - J^0,$$

so hat man

$$(5.\text{c.})\qquad \begin{cases} 2\,(2\,J^2+4\,J^4+6\,J^6+8\,J^8+\cdots) = \iint J^0 dz^2, \\ 2\,(2\,J^3+4\,J^5+6\,J^7+8\,J^9+\cdots) = z - \int J^0 dz, \end{cases}$$

wo die Integrale von 0 bis z genommen sind.

Sei ferner in (4.) n nicht Null, dagegen $\mu=1$ so haben wir

$$(6.)\qquad \frac{\partial^2 C^{n+1}_{(1)}}{\partial z^2} = 2n\,(2\,n+1)\,C^n_{(1)}.$$

Differentiiren wir diese Gleichung nach und nach 2, 4, 6, ..., $2m$mal nach z, und setzen gleichzeitig resp. $n+1$, $n+2$, $n+3$, ..., $n+m$ statt n, so erhalten wir folgende Gruppe

$$\frac{\partial^2 C^{n+1}_{(1)}}{\partial z^2} = 2\,n\,(2\,n+1)\,C^n_{(1)}$$

$$\frac{\partial^4 C^{n+2}_{(1)}}{\partial z^4} = (2n+2)(2n+3)\frac{\partial^2 C^{n+1}_{(1)}}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^6 C^{n+3}_{(1)}}{\partial z^6} = (2n+4)(2n+5)\frac{\partial^4 C^{n+2}_{(1)}}{\partial z^4}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{\partial^{2m+2} C^{n+m+1}_{(1)}}{\partial z^{2m+2}} = (2n+2m)(2n+2m+1)\frac{\partial^{2m} C^{n+m}_{(1)}}{\partial z^{2m}}.$$

Addirt man diese Gleichungen, nachdem man die erste mit $(2n+2)(2n+3)$, die zweite mit $(2n+4)(2n+5)$, die dritte mit $(2n+6)(2n+7)$, ..., endlich die vorletzte mit $(2n+2m)(2n+2m+1)$ multiplicirt hat, so findet man

$$(7.)\quad \frac{\partial^{2m+2} C_{(1)}^{n+m+1}}{\partial z^{2m+2}} = 2n(2n+1)(2n+2)(2n+3)\, C_{(1)}^{n},$$

wo n nicht Null sein darf. Für $n=1$ wird sie

$$(7.\mathrm{a.})\quad \frac{\partial^{2m+2} C_{(1)}^{m+2}}{\partial z^{2m+2}} = 2.3.4.5\, C_{(1)}^{1}.$$

Ebenso würde man für ein positiv ganzes n und $\mu = -1$ aus (4.) die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 C_{(-1)}^{n+1}}{\partial z^2} = 2n(2n+1)\, C_{(-1)}^{n}$$

und

$$\frac{\partial^{2m+2} C_{(-1)}^{n+m+1}}{\partial z^{2m+2}} = 2n(2n+1)(2n+2)(2n+3)\, C_{(-1)}^{n}$$

finden, welche sich jedoch von den Gleichungen (6.) und (7.) nicht wesentlich unterscheiden.

Nun folgt aber aus Gleichung (5.), dass

$$2\,\frac{\partial^2 C_{(1)}^{1}}{\partial z^2} = J^{\nu-1}$$

oder

$$2\, C_{(1)}^{1} = \int_0^z\!\!\int_0^z J^{\nu-1}\, dz^2.$$

Dadurch wird aber aus Gleichung (7.a.) die folgende

$$\frac{\partial^{2m+2} C_{(1)}^{m+2}}{\partial z^{2m+2}} = 3.4.5 \iint J^{\nu-1}\, dz^2$$

oder

$$C_{(1)}^{m+2} = 3.4.5 \int^{2m+4} J^{\nu-1}\, dz^{2m+4}.$$

Durch diese Gleichung, welche in vollständiger Schreibweise, und wenn $\nu+1$ statt ν gesetzt wird, so lautet

$$(8.)\quad \Sigma\, (2p+4)^{m+2|2}\, (2p+2)^{m+1|-2}\, J^{\nu+2p+2} = 3.4.5 \int^{2m+4} J^{\nu}\, dz^{2m+4},$$

und die bereits bekannte

$$(5.\mathrm{a.})\quad 2\,\Sigma\, (2p+2)\, J^{\nu+2p+2} = \iint J^{\nu}\, dz^2$$

sind alle vielfachen Integrale gerader Ordnung sämmtlicher Bessel'scher Functionen in nach Bessel'schen Functionen fortschreitende Reihen entwickelt.

Setzt man in der zweiten Gleichung (3.) $n = 0$ und $\mu = -1$, so ergibt sich

$$2\, D^0_{(-1)} = 2\, \frac{\partial C^1_{(-1)}}{\partial z},$$

oder, weil nach (5.)

$$2\, \frac{\partial C^1_{(-1)}}{\partial z} = \int J^{\nu+1}\, dz$$

ist:

$$2\, D^0_{(-1)} = \int J^{\nu+1}\, dz.$$

Schreibt man statt D die entsprechende Reihe und setzt gleichzeitig $\nu - 1$ statt ν, so hat man

$$\text{(9.a.)} \qquad 2\, \Sigma\, J^{\nu+2p+1} = \int J^{\nu}\, dz.$$

Substituirt man ferner in die 2[te] Gleichung der Gruppe (3.) $m+1$ für n und 1 für μ, so folgt

$$(2m+3)\, D^{m+1}_{(1)} = \frac{\partial C^{m+2}_{(1)}}{\partial z}$$

oder

$$(2m+3)\, D^{m+1}_{(1)} = 3\,.\,4\,.\,5 \int^{2m+3} J^{\nu-1}\, dz^{2m+3}$$

oder vollständig geschrieben und ν durch $\nu+1$ ersetzt:

$$\text{9.)} \quad (2m+3)\, \Sigma\, (2p+4)^{m+1|2} (2p+2)^{m+1|-2}\, J^{\nu+2p+3} = 3.4.5 \int^{2m+3} J^{\nu}\, dz^{2m+3}.$$

Durch die Formeln (9.) und (9.a.) sind demnach **auch die Integrale ungerader Ordnung einer jeden Bessel'schen Function nach Bessel'schen Functionen entwickelt.**

Für $\nu = 0$ z. B. liefern die Gleichungen (8.) und (9.) folgende speciellere Formeln:

$$\text{(8.b.)} \begin{cases} 2\,(2\, J^2 + 4\, J^4 + 6\, J^6 + 8\, J^8 + \cdots) = \iint J^0\, dz^2 \\ 4.6.2\, J^4 + 6.8.4\, J^6 + 8.10.6\, J^8 + \cdots = 3.4.5 \int^4 J^0\, dz^4 \\ 6.8.10.4.2\, J^6 + 8.10.12.6.4\, J^8 + 10.12.14.8.6\, J^{10} + \cdots = 3.4.5 \int^6 J^0\, z d^6 \\ 8.10.12.14.6.4.2\, J^8 + 10.12.14.16.8.6.4\, J^{10} + \cdots = 3.4.5 \int^8 J^0\, dz^8 \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

und

$$\text{(9.b.)} \begin{cases} 2\,(J^1 + J^3 + J^5 + J^7 + J^9 + \cdots) = \int J^0\, dz \\ 3\,(4.2\, J^3 + 6.4\, J^5 + 8.6\, J^7 + 10.8\, J^9 + \cdots) = 3.4.5 \int^3 J^0\, dz^3 \\ 5\,(6.8.4.2\, J^5 + 8.10.6.4\, J^7 + 10.12.8.6\, J^9 + \cdots) = 3.4.5 \int^5 J^0\, dz^5 \\ 7\,(8.10.12.6.4.2\, J^7 + 10.12.14.8.6.4\, J^9 + \cdots) = 3.4.5 \int^7 J^0\, dz^7 \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Wir gehen jetzt auf die Gleichungen (4.) und (5.) des §. 10. zurück und setzen darin $\nu = 0$. Dann werden sie

$$2\,A^{m}_{(0)} = 2\,z^{2m} A^{0}_{(0)} + J^0 \sum_{p=0}^{p=m-1} (-1)^p\, 3^{p|2}\, 1^{p|2}\, z^{2m-2p-1}$$
$$- J^1 \sum_{p=0}^{p=m-1} (-1)^p \,.\, 1^{p|2}\, 1^{p|2} \,.\, z^{2m-2p}$$

und

$$2\,B^{m}_{(0)} = 2\,z^{2m+1} A^{0}_{(0)} + J^0 \sum_{p=0}^{p=m-1} (-1)^p\, 3^{p|2}\, 1^{p|2}\, z^{2m-2p}$$
$$- J^1 \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p\, 1^{p|2}\, 1^{p|2} \,.\, z^{2m-2p+1} \,.$$

Nun ist aber

$$A^{0}_{(0)} = J^1 + J^3 + J^5 + J^7 + \cdots,$$

also nach der ersten Gleichung der Gruppe (9. b.)

$$A^{0}_{(0)} = \tfrac{1}{2} \int J^0\, dz \,.$$

Man hat demnach, wenn man diesen Werth oben einsetzt, und statt $A^{m}_{(0)}$ und $B^{m}_{(0)}$ die Reihen schreibt, deren Repräsentanten sie sind, folgende zwei Gleichungen:

$$(10.)\quad 2 \sum (2p+1)^{m|2} (2p+1)^{m|-2} J^{2p+1} = z^{2m} \int J^0\, dz$$
$$+ J^0 \sum_{p=0}^{p=m-1} (-1)^p (2p+1) \left(1^{p|2}\right)^2 . z^{2m-2p-1}$$
$$- J^1 \sum_{p=0}^{p=m-1} (-1)^p \left(1^{p|2}\right)^2 z^{2m-2p} ,$$

$$(11.)\quad 2 \sum (2p+2)(2p+3)^{m|2} (2p+1)^{m|-2} J^{2p+2} = z^{2m+1} \int J^0\, dz$$
$$+ J^0 \sum_{p=0}^{p=m-1} (-1)^p (2p+1) \left(1^{p|2}\right)^2 z^{2m-2p}$$
$$- J^1 \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p . \left(1^{p|2}\right)^2 . z^{2m-2p+1} \,.$$

Daraus gehen für $m = 0, 1, 2, \ldots$ folgende specielle Gleichungen hervor:

$$(10.\text{a.})\quad \begin{cases} 2\,(J^1 + J^3 + J^5 + J^7 + J^9 + \cdots) = \int J^0\, dz \\ 2\,(1^2 J^1 + 3^2 J^3 + 5^2 J^5 + 7^2 J^7 + 9^2 J^9 + \cdots) = z^2 \int J^0 dz + z J^0 - z^2 J^1 \\ 2\,(3.5.3.1 J^3 + 5.7.5.3 J^5 + 7.9.7.5 J^7 + \cdots) = z^4 \int J^0 dz + J^0 (z^3 - 3z \\ \qquad - J^1 (z^4 - z^2 - 6) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$
(11.a.)\left\{\begin{array}{l}
2\,(2\,J^2+4\,J^4+6\,J^6+8\,J^8+\cdots)=z\int J^0\,dz-z\,J^1 \\
2\,(1.2.3\,J^2+3.4.5\,J^4+5.6.7\,J^6+\cdots)=z^3\int J^0\,dz+z^2\,J^0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -J^1\,(z^3-z) \\
2\,(4.5.7.3.1\,J^4+6.7.9.5.3\,J^6+\cdots)=z^5\int J^0\,dz+60\,J^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad +J^0\,(z^4-3\,z^2) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -J^1\,(z^5-z^3+9\,z) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.
$$

Durch geeignete Combination der im gegenwärtigen und im vorigen Paragraphen gewonnenen Resultate würde man noch eine Menge derartiger Reihen nebst ihren Summenwerthen ableiten können. Addirt man z. B. die beiden ersten Gleichungen der Gruppe (6.a. §. 13.), nämlich die Gleichungen

$$2\,\Sigma\,(2\,p+1)\,J^{2p+1}=z$$

und
$$2\,\Sigma\,(2p+1)\,2p\,(2p+2)\,J^{2p+1}=z^3\,,$$

so erhält man

$$2\,\Sigma\,(2\,p+1)^3\,J^{2p+1}=z\,(1+z^2)$$

oder

$$(12.)\quad 2\,(1^3\,J^1+3^3\,J^3+5^3\,J^5+7^3\,J^7+\cdots)=z\,(1+z^2)\,.$$

Addirt man ferner die Gleichungen

$$2\,\Sigma\,(2p)^2\,J^{2p}=z^2$$
$$2\,\Sigma\,4\,p\,J^{2p}=2\,z\int J^0\,dz-2\,z\,J^1$$
$$2\,\Sigma\,J^{2p}=1+J^0\,,$$

von denen die erste und dritte resp. die zweite und erste der Gruppe (5.a. §. 13.), die mittlere dagegen die erste der Gruppe (11.a. §. 14.), doppelt genommen, ist, so findet man

$$(13.)\quad 2\,\Sigma\,(2\,p+1)^2\,J^{2p}=1+z^2+J^0-2\,z\,J^1+2\,z\int J^0\,dz\,.$$

Will man endlich die Summe aller Bessel'schen Functionen mit positiven ganzen Indices kennen, so addire man die Gleichungen

$$2\,\Sigma\,J^{2p}=1+J^0$$

und
$$2\,\Sigma\,J^{2p+1}=\int J^0\,dz\,,\qquad (10.a.)$$

um sofort

$$2\,\Sigma\,J^p=1+J^0+\int J^0\,dz$$

oder

$$(14.)\quad 2\,(J^0+J^1+J^2+J^3+J^4+J^5+\cdots)=1+J^0+\int J^0\,dz$$

zu erhalten. U. s. w. f.

§. 15. Reihen, welche nach Quadraten von Bessel'schen Functionen fortschreiten.

Eine derartige Reihe, nämlich

$$(1.)\quad (J^0)^2 + 2(J^1)^2 + 2(J^2)^2 + 2(J^3)^2 + \cdots = 1,$$

haben wir bereits in §. 12. kennen gelernt. Weitere solche Reihen werden wir erhalten, wenn wir die Gleichung (7. §. 3.), d. i.

$$\frac{2\nu}{z} \cdot \frac{\partial (J^\nu)^2}{\partial z} = (J^{\nu-1})^2 - (J^{\nu+1})^2,$$

einer ähnlichen Behandlung, wie in den vorigen Paragraphen die Gleichungen

$$\frac{2\nu}{z} J^\nu = J^{\nu-1} + J^{\nu+1}$$

und

$$2\frac{\partial J^\nu}{\partial z} = J^{\nu-1} - J^{\nu+1}$$

unterwerfen. Wir wollen uns jedoch damit begnügen, nur einige wenige hierher gehörige Resultate von geringerer Allgemeinheit abzuleiten.

Wir denken uns zuerst in obige Gleichung statt ν nach und nach $\nu+2$, $\nu+4$, ..., $\nu+2p$, ... eingesetzt, und sodann alle so entstandene Gleichungen bis in's Unendliche addirt, so erhalten wir

$$(2.)\quad \frac{2}{z}\frac{\partial}{\partial z}\sum (\nu+2p)(J^{\nu+2p})^2 = (J^{\nu-1})^2.$$

Daraus gehen für $\nu=m+1$ und $\nu=m+2$ die zwei folgenden Gleichungen

$$(3.)\quad 2\frac{\partial}{\partial z}\sum (m+2p+1)(J^{m+2p+1})^2 = z(J^m)^2,$$

$$(4.)\quad 2\frac{\partial}{\partial z}\sum (m+2p+2)(J^{m+2p+2})^2 = z(J^{m+1})^2$$

hervor. Durch Addition und Subtraction derselben erhält man

$$(5.)\quad 2\frac{\partial}{\partial z}\sum (m+p+1)(J^{m+p+1})^2 = z(J^m)^2 + z(J^{m+1})^2,$$

$$(6.)\quad 2\frac{\partial}{\partial z}\sum (-1)^p(m+p+1)(J^{m+p+1})^2 = z(J^m)^2 - z(J^{m+1})^2.$$

Nun ist aber, mit Rücksicht auf die Gleichungen (3. u. 4. §. 3.):

$$\frac{\partial (z J^m J^{m+1})}{\partial z} = z \frac{\partial J^m J^{m+1}}{\partial z} + J^m J^{m+1}$$

$$= z J^m \left(- \frac{m+1}{z} J^{m+1} + J^m\right) + z J^{m+1} \left(\frac{m}{z} J^m - J^{m+1}\right) + J^m J^{m+1},$$

d. h. es ist

$$z (J^m)^2 - z (J^{m+1})^2 = \frac{\partial (z J^m J^{m+1})}{\partial z}.$$

Die Gleichung (6.) nimmt daher nach Einsetzung dieses Werthes folgende Gestalt an:

$$(6.) \qquad 2 \Sigma (-1)^p (m+p+1) (J^{m+p+1})^2 = z J^m J^{m+1}.$$

Multiplicirt man nun noch die Gleichung (7. §. 3.) mit $\nu+1$, setzt dann statt ν nach und nach $\nu+2$, $\nu+4$, $\nu+6$, ..., $\nu+2p$, ... und addirt sämmtliche so erhaltenen Gleichungen, so ergibt sich

$$(7.) \quad \frac{2}{z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \sum (\nu+2p)(\nu+2p+1)(J^{\nu+2p})^2 = (\nu+1)(J^{\nu-1})^2 + 2 \Sigma (J^{\nu+2p+1})^2,$$

woraus für $\nu=1$ und $\nu=2$ folgende zwei speciellere Gleichungen hervorgehen:

$$\frac{2}{z} \frac{\partial}{\partial z} \sum (2p+1)(2p+2)(J^{2p+1})^2 = 2 (J^0)^2 + 2 \sum (J^{2p+2})^2,$$

$$\frac{2}{z} \frac{\partial}{\partial z} \sum (2p+2)(2p+3)(J^{2p+2})^2 = 3 (J^1)^2 + 2 \sum (J^{2p+3})^2.$$

Addirt man dieselben, so hat man sofort

$$\frac{2}{z} \frac{\partial}{\partial z} \sum (p+1)(p+2)(J^{p+1})^2 = (J^1)^2 + 2 \sum (J^p)^2.$$

Zieht man davon die Gleichung (5.), nachdem $m=0$ in ihr gesetzt ist, nämlich

$$\frac{2}{z} \frac{\partial}{\partial z} \sum (p+1)(J^{p+1})^2 = (J^0)^2 + (J^1)^2$$

ab, so bleibt

$$\frac{2}{z} \frac{\partial}{\partial z} \sum (p+1)^2 (J^{p+1})^2 = (J^0)^2 + 2 \sum (J^{p+1})^2.$$

Nach Gleichung (1.) aber ist

$$(J^0)^2 + 2 \Sigma (J^{p+1})^2 = 1.$$

Wir haben demnach schliesslich folgende bemerkenswerthe Gleichung

$$(8.) \qquad \frac{2}{z} \frac{\partial}{\partial z} \sum (p+1)^2 (J^{p+1})^2 = 1$$

oder

$$(8.a.) \quad 1^2 (J^1)^2 + 2^2 (J^2)^2 + 3^2 (J^3)^2 + 4^2 (J^4)^2 + \cdots = \frac{z^2}{4} \cdot$$

Man sieht leicht ein, dass auf dem hier betretenen Wege noch manches derartige Resultat gefunden werden könnte. Wir begnügen uns jedoch mit dem bisher gefundenen, um nicht durch die Ueberfülle von Einzelnheiten zu ermüden.

Die Formeln (5.) und (6.) des §. 13. sind, soviel mir bekannt ist, zuerst von **Schlömilch*)** gegeben worden, die Formeln (11.) ebendaselbst sind schon seit **Bessel** bekannt. Dagegen scheinen die in den §§. 14. und 15. entwickelten Gleichungen grösstentheils neu zu sein, wenn man nicht etwa sämmtliche Resultate der §§. 13. und 14. als Beispiele betrachten will zu dem von **Neumann**)** bewiesenen Lehrsatz: **Jede Function $f(z)$, welche innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkt O** (Anfangspunkt der Zahlenebene) **eindeutig und stetig bleibt, kann nach Bessel'schen Functionen** (erster Art) **entwickelt werden.** Die Formeln des gegenwärtigen Paragraphen scheinen darauf hinzudeuten, dass, wenigstens für Functionen von geradem Grade, eine ähnliche Entwickelung nach Quadraten von Bessel'schen Functionen möglich ist.

Eine Frage, nämlich die nach der Convergenz der in den §§. 13—15. entwickelten Reihen, wurde bisher noch gar nicht berührt. Es lässt sich aber leicht zeigen, **dass diese Reihen sämmtlich convergent sind für jeden Werth** von z. Nehmen wir als Beispiel die in §. 13. mit $A^n_{(\nu)}$ bezeichnete Reihe. Der Quotient des $(p+1)^{\text{ten}}$ Gliedes durch das p^{te} ist

$$\frac{(\nu+2p+1)^{n|2}(\nu+2p+1)^{n|-2}}{(\nu+2p-1)^{n|2}(\nu+2p-1)^{n|-2}} \cdot \frac{J^{\nu+2p+1}}{J^{\nu+2p-1}}$$

$$= \frac{(\nu+2p+1)(\nu+2p+2n-1)}{(\nu+2p-1)(\nu+2p-2n+1)} \cdot \frac{J^{\nu+2p+1}}{J^{\nu+2p-1}} \cdot$$

Bei wachsendem p nähert sich der Quotient der beiden Bessel'schen Functionen der Null (ein Blick auf den Kettenbruch (3. §. 2.) genügt, um sich davon zu überzeugen), während gleichzeitig der vorausgestellte Factor gegen die Einheit rückt. Die Convergenz der Reihe $A^n_{(\nu)}$ ist dadurch ausser Zweifel gesetzt, und es leuchtet

---

*) **Schlömilch**, Zeitschrift für Math. u. Phys., II. Jahrg. S. 141.

) C. **Neumann, Theorie der Bessel'schen Functionen. Leipzig, 1867.

ein, dass auch alle andern hier vorkommenden Reihen, auf dieselbe Weise behandelt, zu dem nämlichen Resultate führen.

§. 16. Entwickelung von $J_{(z)}^{m+\frac{1}{2}}$.

Wenn ν ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ $\left(=\frac{2m+1}{2}\right)$ ist, so lässt sich das Integral

$$\int_{-1}^{+1} e^{izu}\,(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,du$$

in geschlossener Form herstellen.

Ist nämlich $\varphi(u)$ eine beliebige Function von u, so erhält man durch fortgesetzte Anwendung der theilweisen Integration

$$\int e^{izu}\,\varphi(u)\,.\,du = -\,e^{izu}\sum \frac{i^{p+1}}{z^{p+1}}\,\varphi^p(u)\,,$$

wo $\varphi^p(u)$ den p^{ten} Differentialquotienten von $\varphi(u)$ ausdrücken soll. Hier aber ist, für $\nu = \frac{2m+1}{2}$,

$$\varphi(u) = (1-u^2)^m = (1+u)^m\,(1-u)^m\,,$$

folglich, mit Anwendung des binomischen Lehrsatzes

$$\begin{aligned}\varphi(u+h) &= (1+u+h)^m(1-u-h)^m\\ &= \sum \frac{m^{q|-1}}{q!}\,(1+u)^{m-q}h^q\,.\sum(-1)^r\cdot\frac{m^{r|-1}}{r!}\,(1-u)^{m-r}\,h^r\\ &= \sum\sum(-1)^r\cdot\frac{m^{q|-1}\,m^{r|-1}}{q!\,r!}\,(1+u)^{m-q}\,(1-u)^{m-r}\,h^{q+r}\,.\end{aligned}$$

Der Coefficient von h^p in dieser Entwickelung ist nichts anderes als $\varphi^p(u)$ noch dividirt durch $p!$. Demnach hat man

$$\varphi^p(u) = \sum(-1)^r\cdot\frac{p!}{q!\,r!}\,m^{q|-1}\,m^{r|-1}\,(1+u)^{m-q}\,(1-u)^{m-r}$$

$$\text{für } (q+r=p)\,,$$

wo in der Summe statt q und r nur solche positive ganze Zahlen, die Null mit inbegriffen, gesetzt werden dürfen, welche der Bedingungsgleichung $q+r=p$ genügen.

Setzt man darin $u=1$, so verschwinden alle Glieder der Summe wegen des Factors $1-u$, mit Ausnahme desjenigen, welches diesen Factor auf der Potenz Null enthält. Man hat also gleichzeitig $r=m$, $q=p-m$, $m-q=2m-p$ zu nehmen, und erhält

$$[\varphi^p(u)]_1 = (-1)^m \cdot \frac{p!}{(p-m)!} \, m^{p-m|-1} \, 2^{2m-p} \, .$$

Substituirt man dagegen $u = -1$ in $\varphi^p(u)$, so verschwinden alle Glieder, welche den Factor $1+u$ auf einer andern, als der 0ten Potenz enthalten; indem man daher $q=m, r=p-m, m-r=2m-p$ setzt, bekommt man

$$[\varphi^p(u)]_{-1} = (-1)^{p-m} \frac{p!}{(p-m)!} \, m^{p-m|-1} \, 2^{2m-p} \, .$$

Führt man daher oben die Grenzen -1 und $+1$ ein, so ergibt sich

$$\int_{-1}^{+1} e^{izu}(1-u^2)^m \, . \, du = -e^{iz} \sum (-1)^m \cdot \frac{p!}{(p-m)!} \, m^{p-m|-1} \, . \, 2^{2m-p} \, . \, \frac{i^{p+1}}{z^{p+1}}$$

$$+ e^{-iz} \sum (-1)^{p-m} \frac{p!}{(p-m)!} \, m^{p-m|-1} \, 2^{2m-p} \, \frac{i^{p+1}}{z^{p+1}} \, ,$$

oder, wenn man, da p offenbar nicht kleiner als m sein kann, lieber $m+p$ statt p schreibt

$$\int_{-1}^{+1} e^{izu}(1-u^2)^m \, du = -(-1)^m 2^m e^{iz} \sum \frac{(m+p)! \, m^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot \frac{i^{m+p+1}}{z^{m+p+1}}$$

$$+ 2^m e^{-iz} \sum (-1)^p \cdot \frac{(m+p)! \, m^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot \frac{i^{m+p+1}}{z^{m+p+1}} \, .$$

Da nun

$$J_{(z)}^{m+\frac{1}{2}} = \frac{z^{m+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \, . \, 2^m \, . \, m!} \int_{-1}^{+1} e^{izu}(1-u^2)^m \, . \, du$$

ist, so hat man

$$(1.) \qquad J_{(z)}^{m+\frac{1}{2}} = (-i)^{m+1} \cdot \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}} \sum \frac{(m+1)^{p|1} \, m^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot \frac{i^p}{z^p}$$

$$+ i^{m+1} \cdot \frac{e^{-iz}}{\sqrt{2\pi z}} \sum (-1)^p \cdot \frac{(m+1)^{p|1} \, m^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot \frac{i^p}{z^p} \, ,$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$(-i)^{m+1} \cdot \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}} \sum \frac{(m+1)^{p|1} \, m^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot \frac{i^p}{z^p} = R_{(z)}^{m+\frac{1}{2}}$$

setzt:

$$(1.a.) \qquad J_{(z)}^{m+\frac{1}{2}} = R_{(z)}^{m+\frac{1}{2}} - (-1)^m \, . \, i \, R_{(-z)}^{m+\frac{1}{2}} \, .$$

Nun ist aber

$$\sum \frac{(m+1)^{p|1}\, m^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot \frac{i^p}{z^p} = \sum (-1)^p \cdot \frac{(m+1)^{2p|1}\, m^{2p|-1}}{2^{2p|2}} \cdot \frac{1}{z^{2p}}$$

$$+ i \sum (-1)^p \cdot \frac{(m+1)^{2p+1|1}\, m^{2p+1|-1}}{2^{2p+1|2}} \cdot \frac{1}{z^{2p+1}} = P^m + Q^m i$$

und ebenso

$$\sum (-1)^p \cdot \frac{(m+1)^{p|1}\, m^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot \frac{i^p}{z^p} = P^m - Q^m i .$$

Daher hat man

$$J_{(z)}^{m+\frac{1}{2}} = \frac{i^{m+1}}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ (-1)^{m+1} e^{iz} (P^m + Q^m i) + e^{-iz} (P^m - Q^m i) \right\} .$$

Ist nun m gerade $= 2n$, so erhält man daraus

$$(2.) \qquad J_{(z)}^{2n+\frac{1}{2}} = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ P^{2n} \sin z + Q^{2n} \cos z \right\}$$

und ebenso für ein ungerades m $(= 2n + 1)$

$$(3.) \qquad J_{(z)}^{2n+\frac{3}{2}} = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ Q^{2n+1} \sin z - P^{2n+1} \cos z \right\} .$$

In diesen Gleichungen ist

$$(4.) \qquad \begin{cases} P^m = \sum (-1)^p \cdot \dfrac{(m+1)^{2p|1}\, m^{2p|-1}}{2^{2p|2}} \cdot \dfrac{1}{z^{2p}} \\[2ex] Q^m = \sum (-1)^p \cdot \dfrac{(m+1)^{2p+1|1}\, m^{2p+1|-1}}{2^{2p+1|2}} \cdot \dfrac{1}{z^{2p+1}} , \end{cases}$$

während die oben eingeführte Function $R_{(z)}^{m+\frac{1}{2}}$, in P und Q ausgedrückt, folgende Gestalt annimmt:

$$R_{(z)}^{m+\frac{1}{2}} = (-i)^{m+1} \cdot \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}} (P^m + Q^m i) .$$

Einen für beide Fälle gemeinsamen Ausdruck erhält man mit leichter Mühe aus der Reductionsformel 1. (§. 1.). Setzt man nämlich daselbst $m + \frac{3}{2}$ statt ν, so wird

$$J^{m+\frac{3}{2}} = J^{\frac{3}{2}} \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \frac{(2p+3)^{m-2p|2}}{z^{m-2p}}$$

$$- J^{\frac{1}{2}} \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \frac{(2p+5)^{m-1-2p|2}}{z^{m-1-2p}} .$$

Es ist aber, wie man leicht findet:

$$J^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin z ,$$

$$J^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right) .$$

Setzt man diese Werthe oben ein, so ergibt sich zunächst:

$$J^{m+\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin z \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \frac{(2p+3)^{m-2p|2}}{z^{m+1-2p}}$$

$$- \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos z \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \frac{(2p+3)^{m-2p|2}}{z^{m-2p}}$$

$$- \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin z \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \frac{(2p+5)^{m-1-2p|2}}{z^{m-1-2p}}.$$

Hier müssen noch die mit $\sin z$ multiplicirten Summen in eine einzige zusammengefasst werden. Sondert man zu diesem Zweck von der ersteren das Anfangsglied ab, indem man zuerst $p = 0$, dann $p+1$ statt p setzt, so erhält man

$$\frac{3^{m|2}}{z^{m+1}} - \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p+1|-1}}{(p+1)!} \frac{(2p+5)^{m-2p-2|2}}{z^{m-1-2p}}$$

$$- \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \frac{(2p+5)^{m-1-2p|2}}{z^{m-1-2p}}$$

$$= \frac{3^{m|2}}{z^{m+1}} - \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \frac{(2p+5)^{m-2p-2|2}}{z^{m-1-2p}} \cdot \left(\frac{m-1-2p}{p+1} + 2m+1-2p\right)$$

$$= \frac{3^{m|2}}{z^{m+1}} - \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \frac{(2p+5)^{m-2p-2|2}}{z^{m-1-2p}} \cdot \frac{(m-p)(2p+3)}{p+1}$$

$$= \frac{3^{m|2}}{z^{m+1}} + \sum (-1)^{p+1} \cdot \frac{(m-p)^{p+1|-1}}{(p+1)!} \cdot \frac{(2p+3)^{m-1-2p|2}}{z^{m-1-2p}}$$

$$= \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-p-1)^{p|-1}}{p!} \frac{(2p+1)^{m+1-2p|2}}{z^{m+1-2p}}.$$

Man hat also

$$(5.) \quad J_{(z)}^{m+\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin z \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-p-1)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+1)^{m+1-2p|2}}{z^{m+1-2p}}$$

$$- \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos z \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+3)^{m-2p|2}}{z^{m-2p}}.$$

Diese Formel unterscheidet sich von den obigen (2.) und (3.) durch nichts, als dass dort die Summen nach steigenden, hier aber nach fallenden Potenzen von $\frac{1}{z}$ geordnet sind. Wollte man hier ebenfalls nach steigenden Potenzen ordnen, so müsste man die Fälle des geraden und ungeraden m auseinanderhalten. und würde dann nothwendig auf die Formeln (2.) und (3.) zurückkommen.

Selbstverständlich genügt die hier entwickelte Function $J_{(z)}^{m+\frac{1}{2}}$ den Grundgesetzen (II.) und (III.) der Bessel'schen Functionen, und

folglich auch allen übrigen Relationen, welche für jedes ν daraus abgeleitet wurden. Nun behaupten wir aber, dass nicht bloss $J_{(z)}^{m+\frac{1}{2}}$ selbst, sondern auch die oben definirte Function $R_{(z)}^{m+\frac{1}{2}}$ für sich allein schon, und dann nothwendig auch $(-1)^m R_{(-z)}^{m+\frac{1}{2}}$ sich diesen Grundgesetzen und dann auch allen daraus gezogenen Consequenzen unterwirft.

Es ist nämlich

$$R_{(z)}^{m-\frac{1}{2}} = (-i)^m \cdot \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}} \sum \frac{m^{p|1}(m-1)^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot \frac{i^p}{z^p},$$

$$R^{m+\frac{3}{2}} = -(-i)^m \cdot \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}} \sum \frac{(m+2)^{p|1}(m+1)^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot \frac{i^p}{z^p},$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, so findet man, weil

$$\begin{aligned} & m^{p|1}(m-1)^{p|-1} - (m+2)^{p|1}(m+1)^{p|-1} \\ & = (m+1)^{p-1|1} m^{p+1|-1} - (m+1)^{p+1|-1} m^{p-1|-1} \\ & = (m+1)^{p-1|1} m^{p-1|-1} \{(m-p+1)(m-p) - (m+p)(m+1-p)\} \\ & = -2p(2m+1)(m+1)^{p-1|1} m^{p-1|-1} \end{aligned}$$

ist, zunächst:

$$R_{(z)}^{m-\frac{1}{2}} + R_{(z)}^{m+\frac{3}{2}} = -(-i)^m(2m+1)\frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}} \sum \frac{(m+1)^{p-1|1} m^{p-1|-1}}{2^{p-1|2}} \cdot \frac{i^p}{z^p},$$

wo jedoch in der Summe zur Rechten p nicht Null werden darf, da in den obigen Summen die Anfangsglieder, in welchen $p=0$ ist, sich wegheben. Schreibt man daher besser $(p+1)$ statt p, so hat man

$$R_{(z)}^{m-\frac{1}{2}} + R_{(z)}^{m+\frac{3}{2}} = (-i)^{m+1} \cdot \frac{2(m+\frac{1}{2})}{z} \cdot \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}} \sum \frac{(m+1)^{p|1} m^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot \frac{i^p}{z^p}$$

oder

$$R_{(z)}^{m-\frac{1}{2}} + R_{(z)}^{m+\frac{3}{2}} = \frac{2(m+\frac{1}{2})}{z} R_{(z)}^{m+\frac{1}{2}}.$$

Diese Gleichung ist aber keine andere, als die Gleichung (II.a.) angewendet auf die Function $R_{(z)}^{m+\frac{1}{2}}$.

Ebenso leicht lässt sich zeigen, dass auch das zweite Grundgesetz (III.) für $R_{(z)}^{m+\frac{1}{2}}$ gelte. Wir setzen $\sqrt{z}$ statt z und multipliciren mit $z^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}}$, so wird

$$z^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}} R_{(\sqrt{z})}^{m+\frac{1}{2}} = (-i)^{m+1} \cdot \frac{e^{i\sqrt{z}}}{\sqrt{2\pi}} \sum \frac{(m+1)^{p|1} m^{p|-1}}{2^{p|2}} i^p \cdot z^{-\frac{m+p+1}{2}}.$$

Differentiirt man hier beiderseits nach z, so kommt:

$$\frac{\partial\left(z^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}}R^{m+\frac{1}{2}}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z} = (-i)^{m+1}\cdot i\cdot\frac{e^{i\sqrt{z}}}{2\sqrt{2\pi}}\sum\frac{(m+1)^{p|1}\,m^{p|-1}}{2^{p|2}}\cdot i^{p}\cdot z^{-\frac{m+p+2}{2}}$$

$$-\,(-i)^{m+1}\cdot\frac{e^{i\sqrt{z}}}{2\sqrt{2\pi}}\sum\frac{(m+1)^{p|1}\,m^{p|-1}}{2^{p|2}}\cdot i^{p}\cdot(m+p+1)\,z^{-\frac{m+p+3}{2}}$$

$$= (-i)^{m+1}\cdot i\,\frac{e^{i\sqrt{z}}}{2\sqrt{2\pi}}\cdot z^{-\frac{m+2}{2}}$$

$$+\,(-i)^{m+1}\cdot i\,\frac{e^{i\sqrt{z}}}{2\sqrt{2\pi}}\sum\frac{(m+1)^{p+1|1}\,m^{p+1|-1}}{2^{p+1|2}}\,i^{p+1}\cdot z^{-\frac{m+p+3}{2}}$$

$$+\,(-i)^{m+1}\cdot i\cdot\frac{e^{i\sqrt{z}}}{2\sqrt{2\pi}}\sum\frac{(m+1)^{p|1}\,m^{p|-1}}{2^{p|2}}\cdot i^{p+1}\,(m+p+1)\,z^{-\frac{m+p+3}{2}}\,.$$

Nun ist aber

$$(m+1)^{p+1|1}\,m^{p+1|-1} = (m+2)^{p|1}\,(m+1)^{p+2|-1}\,,$$

$$(m+1)^{p|1}\,m^{p|-1}\,(m+p+1) = (m+2)^{p|1}\,(m+1)^{p+1|-1}\,,$$

demnach

$$\frac{(m+1)^{p+1|1}\,m^{p+1|-1}}{2^{p+1|2}} + \frac{(m+1)^{p|1}\,m^{p|-1}}{2^{p|2}}\,(m+p+1)$$

$$= \frac{(m+2)^{p|1}\,(m+1)^{p+1|-1}}{2^{p|2}}\cdot\left(\frac{m-p}{2p+2}+1\right)$$

$$= \frac{(m+2)^{p|1}\,(m+1)^{p+1|-1}}{2^{p|2}}\cdot\frac{m+p+2}{2p+2} = \frac{(m+2)^{p+1|1}\,(m+1)^{p+1|-1}}{2^{p+1|2}}\,.$$

Fasst man jetzt obige zwei Summen in eine zusammen, so erhält man

$$\frac{\partial\left(z^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}}R^{m+\frac{1}{2}}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z} = -\,(-i)^{m+2}\cdot\frac{e^{i\sqrt{z}}}{2\sqrt{2\pi}}\cdot z^{-\frac{m+2}{2}}$$

$$-\,(-i)^{m+2}\cdot\frac{e^{i\sqrt{z}}}{2\sqrt{2\pi}}\sum\frac{(m+2)^{p+1|1}\,(m+1)^{p+1|-1}}{2^{p+1|2}}\,i^{p+1}\cdot z^{-\frac{m+p+3}{2}}$$

$$= -\,(-i)^{m+2}\cdot\frac{e^{i\sqrt{z}}}{2\sqrt{2\pi}}\sum\frac{(m+2)^{p|1}\,(m+1)^{p|-1}}{2^{p|2}}\cdot i^{p}\cdot z^{-\frac{m+p+2}{2}}\,,$$

oder endlich

$$\frac{\partial\left(z^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}}R^{m+\frac{1}{2}}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z} = -\,\tfrac{1}{2}\cdot z^{-\frac{m+1}{2}-\frac{1}{4}}\cdot R^{m+\frac{3}{2}}_{(\sqrt{z})}\,,$$

wie behauptet worden.

§. 17. Entwickelung von $J^{\nu}_{(z)}$ nach negativen Potenzen von z.

Aus den zuletzt geführten Beweisen geht hervor, dass die beiden Bestandtheile von $J^{m+\frac{1}{2}}_{(z)}$, $R^{m+\frac{1}{2}}_{(z)}$ und $(-1)^m i R^{m+\frac{1}{2}}_{(-z)}$, vermöge ihrer Form allein schon, ohne Rücksicht auf den speciellen Werth, welchen man dem m beigelegt denken mag, den Grundgesetzen (II. und III.) der Bessel'schen Functionen genügen. Die unendliche Reihe, in welche der Ausdruck

$$J^{m+\frac{1}{2}}_{(z)} = \frac{i^{m+1}}{\sqrt{2\pi z}} \left\{(-1)^{m+1} e^{iz} (P^m + Q^m i) + e^{-iz} (P^m - Q^m i)\right\}$$

für ein gebrochenes m übergeht, wird daher ebenfalls noch jene beiden Grundgleichungen erfüllen und sonach in Form und Eigenschaften mit den bisher betrachteten Bessel'schen Functionen übereinstimmen. Wir halten uns daher für berechtigt, die vorstehende Gleichung auch dann noch als Ausdruck der Bessel'schen Functionen anzusehen, wenn m gebrochen ist, mit dem Vorbehalte freilich, dass die fragliche unendliche Reihe überhaupt zulässig sei.

Unter diesem Vorbehalte haben wir also, wenn wir $m+\frac{1}{2}=\nu$ setzen

$$(1.)\quad J^{\nu}_{(z)} = \frac{i^{\nu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi z}} \left\{(-1)^{\nu+\frac{1}{2}} e^{iz} (P^{\nu-\frac{1}{2}} + Q^{\nu-\frac{1}{2}} i) + e^{-iz} (P^{\nu-\frac{1}{2}} - Q^{\nu-\frac{1}{2}} i)\right\}.$$

Setzen wir in dieser Formel zuerst $2n$ statt ν, so wird dieselbe zunächst, wenn wir der Kürze wegen P_1 und Q_1 resp. statt $P^{2n-\frac{1}{2}}$ $Q^{2n-\frac{1}{2}}$ schreiben:

$$J^{2n}_{(z)} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi z}} \left\{(-i)^{\frac{1}{2}} e^{iz} (P_1 + Q_1 i) + i^{\frac{1}{2}} e^{-iz} (P_1 - Q_1 i)\right\}.$$

Denken wir uns unter i stets seinen positiven Werth $+i$, so ist

$$(-i)^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{4}\pi i} \quad \text{und} \quad i^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{4}\pi i},$$

folglich

$$J^{2n}_{(z)} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi z}} \left\{e^{i(z-\frac{1}{4}\pi)} (P_1 + Q_1 i) + e^{-i(z-\frac{1}{4}\pi)} (P_1 - Q_1 i)\right\}$$

oder

$$(2.)\quad J^{2n}_{(z)} = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{P_1 \cos(z-\tfrac{1}{4}\pi) - Q_1 \sin(z-\tfrac{1}{4}\pi)\right\},$$

worin

$$(2.\text{a.})\quad \begin{cases} P_1 = \sum (-1)^p \cdot \dfrac{(4n+1)^{2p|2}\,(4n-1)^{2p|-2}}{8^{2p|8}} \cdot \dfrac{1}{z^{2p}} \\ Q_1 = \sum (-1)^p \cdot \dfrac{(4n+1)^{2p+1|2}\,(4n-1)^{2p+1|-2}}{8^{2p+1|8}} \cdot \dfrac{1}{z^{2p+1}} \end{cases}$$

ist.

Setzt man ferner $2n+1$ statt ν, so ergibt sich zunächst

$$J_{(z)}^{2n+1} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi z}} \left\{(-i)^{\frac{3}{2}} e^{iz} (P_2 + Q_2 i) + i^{\frac{3}{2}} e^{-iz} (P_2 - Q_2 i)\right\}.$$

Da nun

$$(-i)^{\frac{3}{2}} = e^{-\frac{3}{4}\pi i} \quad \text{und} \quad i^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{4}\pi i}$$

ist, so hat man weiter

$$J_{(z)}^{2n+1} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi z}} \left\{e^{i(z-\frac{3}{4}\pi)} (P_2 + Q_2 i) + e^{-i(z-\frac{3}{4}\pi)} (P_2 - Q_2 i)\right\},$$

woraus sofort eine mit der obigen fast gleichlautende Formel hervorgehen würde, mit dem einzigen Unterschiede nämlich, dass P_2 und Q_2 statt P_1 und Q_1, und $z-\frac{3}{4}\pi$ statt $z-\frac{1}{4}\pi$ stünde. Schreibt man aber lieber $\sin(z-\frac{1}{4}\pi)$ statt $\cos(z-\frac{3}{4}\pi)$ und $-\cos(z-\frac{1}{4}\pi)$ statt $\sin(z-\frac{3}{4}\pi)$, so hat man

$$(3.)\quad J_{(z)}^{2n+1} = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{P_2 \sin(z-\tfrac{1}{4}\pi) + Q_2 \cos(z-\tfrac{1}{4}\pi)\right\}.$$

Darin ist

$$(3.\text{a.})\quad \begin{cases} P_2 = \sum (-1)^p \cdot \dfrac{(4n+3)^{2p|2}\,(4n+1)^{2p|-2}}{8^{2p|8}} \cdot \dfrac{1}{z^{2p}} \\ Q_2 = \sum (-1)^p \cdot \dfrac{(4n+3)^{2p+1|2}\,(4n+1)^{2p+1|-2}}{8^{2p+1|8}} \cdot \dfrac{1}{z^{2p+1}}. \end{cases}$$

Für $n = 0$ z. B. resultiren aus (2.) und (3.) folgende zwei Formeln

$$(2.\text{b.})\quad J_{(z)}^0 = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z-\tfrac{1}{4}\pi) \left\{1 - \frac{1^2.3^2}{8.16}\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{8.16.24.32}\left(\frac{1}{z}\right)^4 - \cdots\right\}$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin(z-\tfrac{1}{4}\pi) \left\{\frac{1^2}{8}\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1^2.3^2.5^2}{8.16.24}\left(\frac{1}{z}\right)^3 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9^2}{8.16.24.32.40}\left(\frac{1}{z}\right)^5 - \cdots\right\},$$

$$(3.\text{b.})\quad J_{(z)}^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin(z-\tfrac{1}{4}\pi) \left\{1 + \frac{3.5.1}{8.16}\left(\frac{1}{z}\right)^2 - \frac{3.5.7.9.1.3.5}{8.16.24.32}\left(\frac{1}{z}\right)^4 + \cdots\right\}$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z-\tfrac{1}{4}\pi) \left\{\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{z} - \frac{3.5.7.1.3}{8.16.24}\left(\frac{1}{z}\right)^3 + \frac{3.5.7.9.11.1.3.5.7}{8.16.24.32.40}\left(\frac{1}{z}\right)^5 - \cdots\right\},$$

Formeln, welche von Hansen*) bei der Berechnung seiner Tabellen der Bessel'schen Functionen J^0 und J^1 benützt wurden.

---

*) Hansen, Ermittelung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung; Schriften der Sternwarte Seeberg, Gotha 1843.

Die in (2.) und (3.) vorkommenden unendlichen Reihen P und Q sind nun freilich divergent; sie gehören aber zur nützlichen Classe der halbconvergenten Reihen, bei welchen der jedesmal begangene Fehler kleiner ist als das letzte in Rechnung gezogene Glied. Um dies nachzuweisen, sei es gestattet, die Reihe (2. b.) nochmals zu entwickeln auf dem Wege, welchen Lipschitz*) gezeigt hat.

Wir schreiben zu dem Ende $J^0_{(z)}$ in der Form

$$J^0_{(z)} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos(zu)}{\sqrt{1-u^2}} \cdot du \tag{4.}$$

und betrachten den Ausdruck $\frac{\cos zu}{\sqrt{1-u^2}}$ als den reellen Theil der Function $\frac{e^{-zw}}{\sqrt{1+w^2}}$ für $w = ui$.

Darin werde nun für w die allgemein complexe Grösse $v + ui$ gesetzt und eine Integration nach $dw = dv + i.du$ ausgeführt. Wird $v + ui$ in üblicher Weise durch einen Punkt der Zahlenebene repräsentirt, dessen rechtwinklige Coordinaten v und u sind, so gilt der bekannte Satz, dass ein über den Umfang einer geschlossenen Linie hinerstrecktes Integral stets den Werth Null hat, wenn die zu integrirende Function im Innern des abgegrenzten Flächenstücks allenthalben eindeutig, stetig und endlich ist. Im jetzigen Falle werde die Function $\frac{e^{-zw}}{\sqrt{1+w^2}}$ über den Umfang eines Rechtecks integrirt, dessen Ecken die Punkte (0), (h), ($h+i$), (i) sind, wo h einen beliebigen positiven Werth bezeichnet; man erkennt alsdann leicht, dass unsere Function im Innern des Rechtecks eindeutig ist, wenn man festsetzt, dass sie stetig sei und für $w = 0$ den Werth $+1$ habe. Für $w + i$ wird sie allerdings unendlich, jedoch so, dass der Werth des Integrals dadurch keine Aenderung erleidet und der oben ausgesprochene Satz seine Geltung beibehält.

Indem man beachtet, dass alle Theile der Integration entweder der Abscissen- oder der Ordinatenaxe parallel genommen werden, und dass der Umfang des Rechtecks stets in demselben

*) Lipschitz, die Bessel'sche Transcendente J. Borchardt's Journal; Bd. 56; 1859.

(positiven) Sinne durchlaufen werden muss, erhält man folgende Gleichung:

$$\int_0^h \frac{e^{-zv}}{\sqrt{1+v^2}} \cdot dv + i \int_0^1 \frac{e^{-z(h+ui)}}{\sqrt{1+(h+ui)^2}} \cdot du - \int_0^h \frac{e^{-z(v+i)}}{\sqrt{1+(v+i)^2}} \cdot dv ,$$

$$- i \int_0^1 \frac{e^{-izu}}{\sqrt{1-u^2}} \cdot du = 0 .$$

Lassen wir nun h über jede Grenze wachsen, so verschwindet das zweite Integral, und bei Sonderung des Reellen und Imaginären liefert der Coefficient von i die Gleichung

$$(5.) \qquad \int_0^1 \frac{\cos zu}{\sqrt{1-u^2}} \cdot du = i \int_0^\infty \frac{e^{-z(v+i)}}{\sqrt{1+(v+i)^2}} \cdot du ,$$

wo zur Rechten nur der reelle Theil zu nehmen ist. Wir setzen nun

$$1 + (v+i)^2 = 2iv + v^2 = \varrho e^{\varphi i},$$

so dass $\varrho = \sqrt{v^4 + 4v^2}$ und $tg\,\varphi = \frac{2}{v}$ wird. Dann ist der Nenner zur Rechten

$$\sqrt{1+(v+i)^2} = \varrho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\varphi i} = e^{\frac{1}{4}\pi i} \varrho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}(\varphi - \frac{1}{2}\pi)i}$$

oder, weil

$$\varrho e^{(\varphi - \frac{1}{2}\pi)i} = (2iv + v^2) . (-i) = 2v - iv^2$$

ist:

$$\sqrt{1+(v+i)^2} = e^{\frac{1}{4}\pi i} . \sqrt{2v - iv^2} .$$

Wir haben also, wenn wir noch bedenken, das $i = e^{\frac{1}{2}\pi i}$ ist:

$$\int_0^1 \frac{(\cos zu)}{\sqrt{1-u^2}} \cdot du = e^{\frac{1}{4}\pi i} \int_0^\infty \frac{e^{-z(v+i)}}{\sqrt{2v - iv^2}} \cdot dv ,$$

und wenn wir $zv = \beta$ einführen

$$\int_0^1 \frac{\cos zu}{\sqrt{1-u^2}} \cdot du = \frac{e^{-(z-\frac{1}{4}\pi)i}}{\sqrt{2z}} \int_0^\infty \frac{e^{-\beta} \beta^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 - \frac{i\beta}{2z}}} \cdot d\beta .$$

Wir erhalten demnach, wenn wir zur Rechten nur den reellen Theil beibehalten, für $J^0_{(z)}$ folgende Gleichung

$$(6.)\quad J^0_{(z)} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(z - \frac{1}{4}\pi)}{\sqrt{2z}} \int_0^\infty e^{-\beta} \beta^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}} \right) d\beta$$

$$- \frac{i}{\pi} \cdot \frac{\sin(z - \frac{1}{4}\pi)}{\sqrt{2z}} \int_0^\infty e^{-\beta} \beta^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}} \right) d\beta\,.$$

Entwickelt man die hierin vorkommenden Wurzelgrössen nach dem begrenzten Taylor'schen Lehrsatz, so findet man

$$(7.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\left(1 - \frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{1}{\left(1 + \frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}} = 2 \sum\limits_{p=0}^{p=m-1} (-1)^p \cdot \dfrac{1^{2p|2}}{2^{2p|2}} \cdot \left(\dfrac{\beta}{2z}\right)^{2p} + (-1)^m R_m \\ \dfrac{1}{\left(1 - \frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{1}{\left(1 + \frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}} = 2i \sum\limits_{p=0}^{p=m-1} (-1)^p \cdot \dfrac{1^{2p+1|2}}{2^{2p+1|2}} \cdot \left(\dfrac{\beta}{2z}\right)^{2p+1} + (-1)^m R'_m\,, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$R_m = \frac{1^{2m|2}}{2^{2m|2}} \left(\frac{\beta}{2z}\right)^{2m} \left(\frac{1}{\left(1 - i\frac{\vartheta\beta}{2z}\right)^{\frac{4m+1}{2}}} + \frac{1}{\left(1 + i\frac{\vartheta\beta}{2z}\right)^{\frac{4m+1}{2}}} \right)$$

$$R'_m = \frac{1^{2m+1|2}}{2^{2m+1|2}} \left(\frac{\beta}{2z}\right)^{2m+1} \left(\frac{1}{\left(1 - i\frac{\vartheta'\beta}{2z}\right)^{\frac{4m+3}{2}}} - \frac{1}{\left(1 + i\frac{\vartheta'\beta}{2z}\right)^{\frac{4m+3}{2}}} \right)$$

gesetzt wurde, und ϑ und ϑ' positive echte Brüche vorstellen.

Führt man diese Reihen oben in (6.) ein und integrirt nach der Formel

$$\int_0^\infty e^{-\beta} \beta^{q-\frac{1}{2}} d\beta = \Gamma(q + \tfrac{1}{2}) = \frac{1^{q|2}}{2^q} \cdot \sqrt{\pi}\,,$$

so erhält man

$$(8.)\quad \begin{cases} J^0_{(z)} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}} \cos(z - \tfrac{1}{4}\pi) \cdot \sum\limits_{p=0}^{p=m-1} (-1)^p \cdot \dfrac{(1^{2p|2})^2}{8^{2p|8}} \cdot \dfrac{1}{2^{2p}} + (-1)^m S_m \\ \quad + \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}} \cdot \sin(z - \tfrac{1}{4}\pi) \cdot \sum\limits_{p=0}^{p=m-1} (-1)^p \cdot \dfrac{(1^{2p+1|2})^2}{8^{2p+1|8}} \cdot \dfrac{1}{z^{2p+1}} + (-1)^m S'_m\,. \end{cases}$$

Darin ist

$$S_m = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(z - \frac{1}{4}\pi)}{\sqrt{2z}} \int_0^\infty e^{-\beta} \beta^{-\frac{1}{2}} R_m d\beta\,,$$

$$S'_m = -\frac{i}{\pi}\cdot\frac{\sin(z-\frac{1}{4}\pi)}{\sqrt{2z}}\int_0^\infty e^{-\beta}\beta^{-\frac{1}{2}}R'_m\,d\beta\,.$$

Setzt man nun

$$1+i\frac{\vartheta\beta}{2z} = \varrho\, e^{\frac{2}{4m+1}\gamma i} \quad \text{und} \quad 1-i\frac{\vartheta\beta}{2z} = \varrho\, e^{-\frac{2}{4m+1}\gamma i}$$

und ebenso

$$1+i\frac{\vartheta'\beta}{2z} = \varrho'\, e^{\frac{2}{4m+3}\gamma' i} \quad \text{und} \quad 1-i\frac{\vartheta'\beta}{2z} = \varrho'\, e^{-\frac{2}{4m+3}\gamma' i}\,,$$

so dass

$$\varrho^2 = 1+\left(\frac{\vartheta\beta}{2z}\right)^2 \qquad tg\,\frac{2}{4m+1}\gamma = \frac{\vartheta\beta}{2z}\,,$$

$$\varrho'^2 = 1+\left(\frac{\vartheta'\beta}{2z}\right)^2 \qquad tg\,\frac{2}{4m+3}\gamma' = \frac{\vartheta'\beta}{2z}$$

wird, so lassen sich obige Ausdrücke in folgende Form bringen:

$$S_m = \sqrt{\frac{2}{z}}\cdot\frac{\cos(z-\frac{1}{4}\pi)}{\pi}\cdot\frac{1^{2m|2}}{2^{2m|2}}\left(\frac{1}{4z}\right)^{2m}\int_0^\infty\frac{e^{-\beta}\beta^{2m-\frac{1}{2}}\cos\gamma\,.\,d\beta}{\left(1+\left(\frac{\vartheta\beta}{2z}\right)^2\right)^{\frac{4m+1}{4}}}\,,$$

$$S'_m = \sqrt{\frac{2}{z}}\cdot\frac{\sin(z-\frac{1}{4}\pi)}{\pi}\cdot\frac{1^{2m+1|2}}{2^{2m+1|2}}\left(\frac{1}{4z}\right)^{2m+1}\int_0^\infty\frac{e^{-\beta}\beta^{2m+\frac{1}{2}}\sin\gamma'\,d\beta}{\left(1+\left(\frac{\vartheta'\beta}{2z}\right)^2\right)^{\frac{4m+3}{4}}}\,.$$

Die absoluten Werthe der hier auftretenden Integrale werden grösser, wenn man im Zähler $\cos\gamma$ und $\sin\gamma'$ durch die Einheit ersetzt und im Nenner die positiven Summanden $\left(\frac{\vartheta\beta}{2z}\right)^2$ und $\left(\frac{\vartheta'\beta}{2z}\right)^2$ unterdrückt. Alsdann lassen sich die Integrationen ausführen und S_m und S'_m verwandeln sich resp. in die $(m+1)^{\text{ten}}$ Glieder der Reihen, welche zur Rechten in Gleichung (8.) stehen. Daraus folgt, dass diese Reihen, welche keine andern sind als die in Gleichung (2. b.) vorkommenden, die Eigenschaft haben, dass der Unterschied zwischen der Summe der angewandten Glieder und dem wahren Werthe der Function stets kleiner ist als das zuletzt in Rechnung gezogene Glied.

Ueberhaupt werden alle in den Formeln (2.) und (3.) enthaltenen Reihen genau auf demselben Wege durch Entwickelung des Integrals

$$J^m_{(z)} = \frac{2^m}{1^{2m|2}} \cdot \frac{1}{\pi\sqrt{2z}} \left\{ \begin{array}{r} \cos\left(z - \frac{2m+1}{4}\pi\right) \int\limits_0^\infty e^{-\beta} \beta^{\frac{2m-1}{2}} \left[\left(1 - \frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{2m-1}{2}} \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{2m-1}{2}} \right] d\beta \\ - i \sin\left(z - \frac{2m+1}{1}\pi\right) \int\limits_0^\infty e^{-\beta} \beta^{\frac{2m-1}{2}} \left[\left(1 - \frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{2m-1}{2}} \right. \\ \left. - \left(1 + \frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{2m-1}{2}} \right] d\beta \end{array} \right.$$

erhalten, und somit kann auch für sie die obige Eigenschaft als erwiesen betrachtet werden.

Nichts hindert, dasselbe Verfahren auch auf beliebig gebrochene Werthe des Index auszudehnen, und es leuchtet von selbst ein, dass man zu analogen Resultaten gelangen würde. Statt diese Entwickelungen zu machen, ziehen wir es jedoch vor, zu unserer Formel (1.), welche alle diese Resultate in grösster Allgemeinheit umfasst und deren Brauchbarkeit jetzt ausser allen Zweifel gesetzt ist, zurückzukehren; es wird nur noch nöthig sein, derselben auch für jedes gebrochene ν eine für den Gebrauch bequeme Gestalt zu geben.

Zuerst sei $\nu = 2n + \varepsilon$, wo ε einen echten zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ enthaltenen Bruch vorstellt; dann ist gemäss (1.):

$$J^{2n+\varepsilon} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ (-i)^{\varepsilon+\frac{1}{2}} e^{zi} (P' + Q'i) + i^{\varepsilon+\frac{1}{2}} e^{-zi} (P' - Q'i) \right\}$$

oder

$$J^{2n+\varepsilon} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ e^{i\left(z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi\right)} (P' + Q'i) + e^{-i\left(z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi\right)} (P' - Q'i) \right\}$$

oder endlich

$$(9.) \qquad J^{2n+\varepsilon} = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ P' \cos\left(z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi\right) - Q' \sin\left(z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi\right) \right\}.$$

worin

$$(9.\,a.) \quad \left\{ \begin{array}{l} P' = \sum (-1)^p \cdot \frac{(4n+2\varepsilon+1)^{2p|2} (4n+2\varepsilon-1)^{2p|-2}}{8^{2p|8}} \cdot \frac{1}{z^{2p}} \\ Q' = \sum (-1)^p \cdot \frac{(4n+2\varepsilon+1)^{2p+1|2} (4n+2\varepsilon-1)^{2p+1|-2}}{8^{2p+1|8}} \cdot \frac{1}{z^{2p+1}} . \end{array} \right.$$

Ebenso erhält man für $\nu = 2n + 1 + \varepsilon$, wo ε dieselbe Bedeutung hat wie oben

$$(10.)\quad J^{2n+1+\varepsilon} = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ P'' \sin\left(z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi\right) + Q'' \cos\left(z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi\right) \right\}$$

und darin ist

$$(10.\text{a.})\quad \begin{cases} P'' = \sum (-1)^p \cdot \dfrac{(4n+2\varepsilon+3)^{2p|2}(4n+2\varepsilon+1)^{2p|-2}}{8^{2p|8}} \cdot \dfrac{1}{z^{2p}} \\[2ex] Q'' = \sum (-1)^p \cdot \dfrac{(4n+2\varepsilon+3)^{2p+1|2}(4n+2\varepsilon+1)^{2p+1|-2}}{8^{2p+1|8}} \cdot \dfrac{1}{z^{2p+1}} . \end{cases}$$

Die Formeln (9.) und (10.), welche die Formeln (2.) und (3.) als specielle Fälle enthalten, erweisen sich als äusserst vortheilhaft bei der numerischen Berechnung von $J^{\nu}_{(z)}$. Die Reihen des §. 5., obgleich convergent für jedes z, werden bei grösseren Werthen von z sehr unbequem. Aber gerade für solche grössere z werden die jetzigen Entwickelungen brauchbar, und liefern die Werthe der Function um so genauer und um so rascher, je grösser z wird.

Die Gleichungen (9.) und (10.) können auch zur Auflösung der transscendenten Gleichungen

$$J^{2n+\varepsilon}_{(z)} = 0 \qquad \text{und } J^{2n+1+\varepsilon}_{(z)} = 0$$

benutzt werden. Aus jener findet man

$$cotg\left(z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi\right) = \frac{Q'}{P'},$$

aus dieser

$$tg\left(z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi\right) = -\frac{Q''}{P''}.$$

Die Wurzelwerthe der ersteren ergeben sich demnach aus der Gleichung

$$z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi = \frac{2m+1}{2}\pi - arc\ tg\frac{Q'}{P'}$$

und die der letzteren aus

$$z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi = m\pi - arc\ tg\frac{Q''}{P''}.$$

Daraus lassen sich die Wurzelwerthe, welche in unbegrenzter Anzahl vorhanden sind, für einigermassen grosse z durch Annäherung berechnen, und zwar mit um so grösserer Genauigkeit, je grösser m und darum auch z ist. Man bemerkt leicht, dass die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Wurzeln, für ein und dieselbe Function, sich um so mehr der Grenze π nähert, je mehr z wächst, und dass die Differenz der gleichvielten Wurzeln zweier Functionen, deren Indices verschieden sind, sich bei wachsendem z der Grenze $\frac{1}{2}\pi$ nähert.

Die nämlichen Resultate ergeben sich auch mit Leichtigkeit aus folgender Bemerkung. Für sehr grosse Werthe von z nähert sich die Reihe Q der Null, während P sich auf das erste Glied 1 zurückzieht. Man hat daher für sehr grosse Werthe von z nahezu:

$$(11.)\quad \begin{cases} J_{(z)}^{2n+\varepsilon} = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi\right) \\ J_{(z)}^{2n+1+\varepsilon} = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi\right), \end{cases}$$

woraus das oben Behauptete sofort evident ist.

Addirt man die Quadrate dieser beiden Gleichungen, so ergibt sich, ebenfalls nur für äusserst grosse Werthe von z, die bemerkenswerthe Relation:

$$(12.)\quad (J_{(z)}^{\nu})^2 + (J_{(z)}^{\nu+1})^2 = \frac{2}{\pi z},$$

d. h. die Summe der Quadrate zweier Bessel'schen Functionen, deren Indices um 1 verschieden sind, nähert sich bei wachsendem z dem Quotienten $\frac{2}{\pi z}$.

§. 18. Ueber die Wurzelwerthe der Gleichung $J_{(z)}^{\nu} = 0$.

Durch die Betrachtungen des vorigen Paragraphen erfuhren wir, dass die Gleichung $J_{(z)}^{\nu} = 0$ unendlich viele Wurzelwerthe besitzt. Da jedoch dieses Resultat mit Benützung divergenter Reihen erlangt wurde, so dürfte es angemessen sein, dasselbe hier nochmals mit aller Strenge nachzuweisen, indem wir zeigen, dass die Function $J_{(z)}^{\nu}$, wenn ihr Argument um 2π wächst, zweimal verschwindet, und dabei jedesmal ihr Vorzeichen wechselt. Wir betreten, um zu diesem Ziele zu gelangen, den von Bessel*) vorgezeichneten Weg.

Wir nehmen zunächst an, ν sei $< \frac{1}{2}$ und $> -\frac{1}{2}$, demnach $\nu - \frac{1}{2}$ negativ echt gebrochen $= -\mu$. Dann ist

$$J_{(z)}^{\nu} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^1 \frac{\cos(zu) \,.\, du}{(1-u^2)^{\mu}}.$$

*) Bessel, Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht. Abh. der Berl. Akad. der Wiss. 1824. S. 39.

Setzt man nun $z = \frac{2m+m'}{2}\pi$, wo m eine ganze Zahl und m' einen echten Bruch bedeutet, so wird das vorstehende Integral

$$\int_0^1 \frac{\cos(zu)\,.\,du}{(1-u^2)^\mu} = \int_0^1 \cos\frac{2m+m'}{2}\pi u \cdot \frac{du}{(1-u^2)^\mu},$$

oder, wenn man v statt $(2m+m')u$ schreibt,

$$= \int_0^{2m+m'} \cos\frac{\pi}{2}v \cdot \frac{dv}{((2m+m')^2-v^2)^\mu}.$$

Wird dieses Integral von $v=a$ bis $v=b$ genommen, und gleichzeitig $h+w$ statt v gesetzt, so hat man

$$\int_a^b \cos\frac{\pi}{2}v \cdot \frac{dv}{((2m+m')^2-v^2)^\mu} = \int_{a-h}^{b-h} \cos\left(\frac{\pi}{2}h+\frac{\pi}{2}w\right)\frac{dw}{((2m+m')^2-(h+w)^2)^\mu}.$$

Darin nun nehmen wir nach und nach $h = 1, 3, 5, \ldots, 2m-1$ und gleichzeitig immer $a = h-1$ und $b = h+1$, und erhalten, wenn zur Abkürzung $2m+m' = \lambda$ gesetzt wird:

$$J^\nu\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)^\nu}{2^\nu\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_{-1}^{+1} \sin\frac{\pi}{2}w\,.\,dw\left\{\frac{-1}{(\lambda^2-(1+w)^2)^\mu}+\frac{1}{(\lambda^2-(3+w)^2)^\mu}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{m-1}}{(\lambda^2-(2m-3+w)^2)^\mu}+\frac{(-1)^m}{(\lambda^2-(2m-1+w)^2)^\mu}\right\}$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(-1)^m\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)^\nu}{2^\nu\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^{m'} \frac{\cos\frac{\pi}{2}w\,.\,dw}{(\lambda^2-(2m+w)^2)^\mu}.$$

Die einzelnen Glieder dieses Ausdrucks sind positiv, das letzte schon darum, weil $\frac{\pi}{2}w$ stets kleiner bleibt als $\frac{\pi}{2}$, die übrigen, weil ihr positiver Theil grösser ist als der negative; denn man hat

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\frac{\pi}{2}w\,.\,dw}{(\lambda^2-(h+w)^2)^\mu} = \int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}w\,.\,dw\left\{\frac{1}{(\lambda^2-(h+w)^2)^\mu}-\frac{1}{(\lambda^2-(h-w)^2)^\mu}\right\},$$

wo der Nenner des positiven Theils stets kleiner ist als der des negativen. Ferner ist jedes folgende Glied grösser als das vorhergehende, wegen der immer abnehmenden Nenner; demnach hat die Summe zweier aufeinanderfolgenden das Zeichen des letzten



derselben. Ist nun m gerade, so ist das letzte Glied in der Klammer positiv und daher die Summe aller Glieder positiv; ist dagegen m ungerade, so ist das letzte Glied innerhalb der Klammer negativ und demnach die Summe aller Glieder vom zweiten an negativ, und das erste Glied sowie das Glied ausserhalb der Klammer sind ebenfalls negativ. Wir können daher aussprechen, dass $J^{\nu}_{(z)}$, wenn ν zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ liegt, von $z = m\pi$ bis $z = (m+\frac{1}{2})\pi$ immer positiv ist, wenn m eine gerade Zahl, und negativ, wenn m ungerade ist.

Aehnliche Eigenschaften besitzt übrigens die Function $J^{\nu}_{(z)}$ auch dann, wenn der Index ν beliebig reell ist. Denn man hat

$$\frac{\partial\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z} = -\tfrac{1}{2} z^{-\frac{\nu+1}{2}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{z})} .$$

Diese Gleichung zeigt, dass $J^{\nu+1}_{(\sqrt{z})}$ verschwindet, wenn $z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$ ein Maximum oder Minimum ist; zwischen zwei Werthen von z oder $\sqrt{z}$, für welche $z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$ verschwindet, liegt aber nothwendig ein Maximum oder Minimum, demnach auch ein Nullwerth von $J^{\nu+1}_{(\sqrt{z})}$. Es geht daraus hervor, dass $J^{\nu+1}_{(z)}$ ebenso oft verschwindet, als $J^{\nu}_{(z)}$ Maximum oder Minimum wird; ebenso muss zwischen zwei Werthen von z, für welche $J^{\nu+1}_{(z)}$ Null wird, ein Maximum oder Minimum von $z^{-\frac{\nu+1}{2}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{z})}$, folglich ein verschwindendes $J^{\nu+2}_{(z)}$ liegen, u. s. f.

Für die negativen Werthe von ν unter $-\frac{1}{2}$ würde sich eine analoge Reihe von Schlussfolgerungen an die Gleichung

$$\frac{\partial\left(z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z} = \tfrac{1}{2} z^{\frac{\nu-1}{2}} J^{\nu-1}_{(\sqrt{z})}$$

anknüpfen lassen.

Um ferner nachzuweisen, dass die Gleichung $J^{\nu}_{(z)} = 0$ keine imaginären Wurzelwerthe besitzt*), erinnern wir uns an folgenden Satz aus der Theorie der algebraischen Gleichungen: Schreibt man die algebraische Gleichung $Z = 0$ nebst den durch Differentiation aus ihr abgeleiteten der Reihe nach an wie folgt:

---

*) Fourier, Théorie analytique de la chaleur. S. 372.

$$Z = 0 \; , \; \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \; , \; \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \; , \; \frac{\partial^3 Z}{\partial z^3} = 0 \; , \; \ldots$$

und nimmt an, dass jede reelle Wurzel irgend einer dieser Gleichungen in die vorausgehende und in die nachfolgende substituirt Resultate von entgegengesetzten Zeichen hervorbringt, so ist gewiss, dass sowohl die vorgelegte Gleichung $Z = 0$, als auch sämmtliche daraus abgeleitete $\frac{\partial Z}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$, $\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3} = 0$, u. s. w., nur reelle Wurzelwerthe besitzen.

Wir betrachten nun die Gleichung $z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})} = 0$ als eine algebraische Gleichung von unendlich hohem Grade; ihre successiven Ableitungen haben, dem Grundgesetze III. zufolge, alle die nämliche Form wie die ursprüngliche Gleichung, nur ist in jeder folgenden der Index um 1 grösser als in der vorhergehenden. Drei beliebige in der Reihe aufeinander folgende dieser Gleichungen würden z. B. lauten:

$$\ldots \; z^{-\frac{\nu+m}{2}} J^{\nu+m}_{(\sqrt{z})} = 0 \; , \; z^{-\frac{\nu+m+1}{2}} J^{\nu+m+1}_{(\sqrt{z})} = 0 \; , \; z^{-\frac{\nu+m+2}{2}} J^{\nu+m+2}_{(\sqrt{z})} = 0 \; , \; \ldots$$

Zwischen diesen drei Functionen besteht aber, vermöge der Grundformel (II.) die Beziehung

$$z \, . \, z^{-\frac{\nu+m+2}{2}} J^{\nu+m+2}_{(\sqrt{z})} = 2(\nu+m+1) \, z^{-\frac{\nu+m+1}{2}} J^{\nu+m+1}_{(\sqrt{z})} - z^{-\frac{\nu+m}{2}} J^{\nu+m}_{(\sqrt{z})} \, ,$$

welche zeigt, dass für einen positiven Werth von z, der $J^{\nu+m+1}_{(\sqrt{z})}$ zu Null macht, $J^{\nu+m}_{(\sqrt{z})}$ und $J^{\nu+m+2}_{(\sqrt{z})}$ entgegengesetzte Zeichen annehmen. Was die negativen Werthe von z anlangt, so erhellt aus der Gleichung (VIII. §. 6.)

$$z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})} = \frac{1}{2^{\nu}\, \Gamma(\nu+1)} \left\{ 1 - \frac{z}{2(2\nu+2)} + \frac{z^2}{2.4(2\nu+2)(2\nu+4)} - + \ldots \right\},$$

dass keiner derselben die Function $z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$ noch irgend eine ihrer Ableitungen zum Verschwinden bringt, weil für ein negatives z alle Glieder dieser Reihe das nämliche Vorzeichen erhalten.

Wir sind demnach überzeugt, dass die Gleichung $z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})} = 0$ nur reelle positive, und demnach die Gleichung $J^{\nu}_{(z)} = 0$ nur reelle Wurzelwerthe haben kann, und zwar zu jedem positiven einen gleichgrossen negativen.

§. 19. Der Fourier'sche Lehrsatz.

Bezeichnet man die positiven Wurzelwerthe der Gleichung $z^{-m}.J^{m}_{(z)} = 0$ ihrer Grösse nach geordnet mit $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_p, \ldots$, so kann jede innerhalb der Grenzen 0 bis 1 beliebig gegebene Function $f(x)$ in eine nach $(\vartheta_p x)^{-m} J^m(\vartheta_p x)$ fortschreitende Reihe entwickelt werden.

Dem Nachweise dieses Lehrsatzes sei der gegenwärtige Paragraph gewidmet. Für den speciellen Fall $m = 0$ wurde derselbe bereits von Fourier*) aufgestellt, und darum halte ich es für zweckmässig, auch das obige allgemeinere Theorem nach Fourier zu benennen.

Wir gehen aus von folgender Entwickelung

$$\varphi(x) = a_0(\zeta_0 x)^{-\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta_0 x}) + a_1(\zeta_1 x)^{-\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta_1 x}) + a_2(\zeta_2 x)^{-\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta_2 x}) + \cdots$$

oder

$$\varphi(x) = \sum a_p (\zeta_p x)^{-\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta_p x}),$$

in welcher ζ_p einen der Wurzelwerthe der Gleichung $z^{-\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{z}) = 0$ vorstellt, und demnach mit ϑ_p^2 identisch ist. Es handelt sich jetzt darum, die Coefficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ zu bestimmen. Um irgend einen dieser Coefficienten, z. B. a_n, zu erhalten, multipliciren wir beiderseits mit $\psi_n\, dx$, wo ψ_n eine Function von x ist, und integriren von $x = 0$ bis $x = 1$. Wir bestimmen sodann die Function ψ_n derart, dass nach vollendeter Integration die rechte Seite der Gleichung sich auf das mit a_n behaftete Glied zurückzieht, alle andern Glieder aber den Werth Null annehmen.

Bezeichnen wir die Function $(\zeta x)^{-\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta x})$ zur Abkürzung mit y, so ist jedes Glied der rechten Seite ein bestimmtes Integral von der Form

$$a \int_0^1 \psi\, y\, dx\,.$$

Die Function y genügt (siehe III. Abschn.) der Differentialgleichung

*) Fourier, Théorie analytique de la chaleur. Chap. VI. S. 386.

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (m+1)\frac{\partial y}{\partial x} + \tfrac{1}{4}\zeta y = 0;$$

demnach ist

$$\int \psi\, y\, dx = -\frac{4}{\zeta}\int\left((m+1)\psi\frac{\partial y}{\partial x} + \psi x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)dx\,.$$

Indem man die hier zur Rechten vorkommenden Integrale der theilweisen Integration unterwirft, erhält man:

$$(m+1)\int \psi\frac{\partial y}{\partial x}dx = C + (m+1)\psi y - (m+1)\int y\frac{\partial \psi}{\partial x}dx\,,$$

$$\int \psi x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot dx = D + \psi x\cdot\frac{\partial y}{\partial x} - y\frac{\partial(\psi x)}{\partial x} + \int y\cdot\frac{\partial^2(\psi x)}{\partial x^2}\cdot dx\,,$$

wo C und D willkührliche Constante sind. Nimmt man diese Integrale zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = x$, so lauten sie

$$(m+1)\int_0^x \psi\frac{\partial y}{\partial x}dx = (m+1)\Big[\psi y\Big]_0^x - (m+1)\int_0^x y\frac{\partial \psi}{\partial x}dx\,,$$

$$\int_0^x \psi x\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot dx = \left[\psi x\frac{\partial y}{\partial x} - y\frac{\partial(\psi x)}{\partial x}\right]_0^x + \int_0^x y\cdot\frac{\partial^2(\psi x)}{\partial x^2}\cdot dx\,,$$

wo die Bezeichnung $\Big[\cdots\Big]_0^x$ wohl ohne nähere Erläuterung verständlich ist. Man hat demnach:

$$-\frac{\zeta}{4}\int_0^x \psi y\,.\,dx = \int_0^x\left(y\cdot\frac{\partial^2(\psi x)}{\partial x^2} - (m+1)\,y\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx$$
$$+\left[\psi x\frac{\partial y}{\partial x} - y\frac{\partial(\psi x)}{\partial x} + (m+1)\psi y\right]_0^x.$$

Bestimmt man nun die Function ψ aus der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2(\psi x)}{\partial x^2} - (m+1)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x} + \tfrac{1}{4}\zeta'\psi = 0\,,$$

wo ζ' eine constante Grösse bedeutet, so kann man das Integral zur Rechten mit dem zur Linken zusammenfassen, und erhält:

$$\frac{\zeta'-\zeta}{4}\int_0^x \psi\, y\, dx = \left[\psi x\frac{\partial y}{\partial x} - y\cdot\frac{\partial(\psi x)}{\partial x} + (m+1)\psi y\right]_0^x.$$

Die obige Differentialgleichung nimmt aber, wenn man $\frac{\partial^2(\psi x)}{\partial x^2}$ entwickelt, folgende Gestalt an:

$$x\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (1-m)\frac{\partial\psi}{\partial x} + \tfrac{1}{4}\zeta'\psi = 0$$

und man erkennt durch Vergleichung mit der oben für y angegebenen Differentialgleichung, dass ihr

$$\psi = (\zeta' x)^{\frac{m}{2}} J^{-m}(\sqrt{\zeta' x})$$

oder, weil für jedes ganze m

$$J^{-m}_{(z)} = (-1)^m J^m_{(z)}$$

ist, auch

$$\psi = (\zeta' x)^{\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta' x})$$

genügt. Führt man diesen Werth in das obige Integral ein, und berücksichtigt dabei, dass

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\left((\zeta x)^{-\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta x})\right)}{\partial x} = -\frac{\zeta}{2}(\zeta x)^{-\frac{m+1}{2}} J^{m+1}(\sqrt{\zeta x})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial\left((\zeta' x)^{\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta' x})\right)}{\partial x} = \frac{\zeta'}{2}(\zeta' x)^{\frac{m-1}{2}} J^{m-1}(\sqrt{\zeta' x})$$

ist, so wird dasselbe, wenn man die Grenzen einführt, und bedenkt, dass der eingeklammerte Ausdruck zur Rechten für $x = 0$ verschwindet:

$$\frac{\zeta' - \zeta}{4}\int_0^x J^m(\sqrt{\zeta x}) \,.\, J^m(\sqrt{\zeta' x}) \,.\, dx$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sqrt{\zeta x} \,.\, J^m(\sqrt{\zeta' x}) \,.\, J^{m+1}(\sqrt{\zeta x}) - \tfrac{1}{2}\sqrt{\zeta' x} \,.\, J^m(\sqrt{\zeta x})\, J^{m-1}(\sqrt{\zeta' x})$$

$$+ \; m\, J^m(\sqrt{\zeta x}) \,.\, J^m(\sqrt{\zeta' x}) \,.$$

Nimmt man nun $x = 1$ als obere Grenze und versteht unter ζ und ζ' Wurzeln der Gleichung $z^{-\frac{m}{2}} J^m_{(\sqrt{z})} = 0$, so hat man

$$(1.) \qquad \int_0^1 J^m(\sqrt{\zeta x}) \,.\, J^m(\sqrt{\zeta' x}) \,.\, dx = 0 \,.$$

Diese Formel gilt jedoch nur so lange, als ζ' von ζ verschieden ist; wenn $\zeta' = \zeta$ gesetzt, ergibt sich der Werth des Integrals unter der Form $\frac{0}{0}$ und wird nach bekannten Regeln bestimmt.

In der Gleichung

$$\int_0^x J^m(\sqrt{\zeta x}) \,.\, J^m(\sqrt{\zeta' x}) \,.\, dx$$

$$= \frac{-2\sqrt{\zeta x} \,.\, J^m(\sqrt{\zeta' x})\, J^{m+1}(\sqrt{\zeta x}) - 2\sqrt{\zeta' x} \,.\, J^m(\sqrt{\zeta x})\, J^{m-1}(\sqrt{\zeta' x}) + 4m\, J^m(\sqrt{\zeta x})\, J^m(\sqrt{\zeta' x})}{\zeta' - \zeta}$$

differentiiren wir nämlich zur Rechten Zähler und Nenner nach ζ' und erhalten dadurch den Ausdruck

$$x J^m(\sqrt{\zeta x})\, J^m(\sqrt{\zeta' x}) - m\sqrt{\frac{x}{\zeta'}} \cdot J^{m+1}(\sqrt{\zeta x}) \,.\, J^m(\sqrt{\zeta' x})$$

$$- m\sqrt{\frac{x}{\zeta'}} \cdot J^m(\sqrt{\zeta x})\, J^{m+1}(\sqrt{\zeta' x}) + x\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta'}} \cdot J^{m+1}(\sqrt{\zeta x}) \,.\, J^{m+1}(\sqrt{\zeta' x}),$$

welcher für $x = 1$ und $\zeta' = \zeta$ in $\left(J^{m+1}(\sqrt{\zeta})\right)^2$ übergeht. Wir haben demnach, wenn $\zeta' = \zeta$ ist:

$$\int_0^1 \left(J^m(\sqrt{\zeta x})\right)^2 dx = \left(J^{m+1}(\sqrt{\zeta})\right)^2. \tag{2.}$$

Die beiden in den Gleichungen (1.) und (2.) ausgesprochenen Sätze, welche an und für sich schon interessant genug sind, können jetzt dazu dienen, in der obigen Entwickelung von $\varphi(x)$ die Coefficienten zu bestimmen. Um a_n zu finden, multipliciren wir die Gleichung

$$\varphi(x) = \sum a_p\, (\zeta_p x)^{-\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta_p x})$$

auf beiden Seiten mit

$$\psi_n = (\zeta_n x)^{+\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta_n x})$$

und integriren von $x = 0$ bis $x = 1$. Zur Rechten verschwinden dann alle Glieder, mit Ausnahme desjenigen, welches den Coefficienten a_n hat; wir erhalten daher zur Bestimmung desselben die Gleichung

$$\int_0^1 \varphi(x) \,.\, (\zeta_n x)^{\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta_n x}) \,.\, dx = a_n \int_0^1 \left(J^m(\sqrt{\zeta_n x})\right)^2 dx,$$

woraus vermöge Gleichung (2.)

$$a_n = \frac{1}{\left(J^{m+1}(\sqrt{\zeta_n})\right)^2} \int_0^1 \varphi(x) \,.\, (\zeta_n x)^{\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta_n x}) \,.\, dx$$

folgt.

Um daraus nun das Eingangs ausgesprochene Theorem zu erhalten, braucht man nur x^2 statt x, $f(x)$ statt $\varphi(x^2)$, ϑ_p statt $\sqrt{\zeta_p}$ zu schreiben, und erhält sogleich

$$f(x) = a_0(\vartheta_0 x)^{-m} J^m(\vartheta_0 x) + a_1(\vartheta_1 x)^{-m} J^m(\vartheta_1 x) + a_1(\vartheta_2 x)^{-m} J^m(\vartheta_2 x) + \cdots$$

oder

$$(3.) \qquad f(x) = \sum a_p (\vartheta_p x)^{-m} J^m(\vartheta_p x)\,,$$

worin

$$(4.) \qquad a_p = \frac{2}{(J^{m+1}(\vartheta_p))^2} \int_0^1 x\, f(x)\, (\vartheta_p x)^m J^m(\vartheta_p x)\,.\,dx$$

ist. Für $m = 0$ erhält man daraus

$$\begin{cases} (3.\,\text{a.}) \qquad f(x) = \sum a_p J^0(\vartheta_p x)\,, \\ (4.\,\text{a.}) \qquad a_p = \dfrac{2}{(J^1(\vartheta_p))^2} \displaystyle\int_0^1 x f(x)\,.\,J^0(\vartheta_p x)\,.\,dx\,, \end{cases}$$

d. i. den von Fourier am oben angeführten Orte bereits nachgewiesenen Lehrsatz.

§. 20. Der Schlömilch'sche Lehrsatz.

Mit dem Fourier'schen Lehrsatz nahe verwandt ist ein von Schlömilch in der oben bereits citirten Abhandlung*) aufgestelltes Theorem, welches ebenfalls von der Entwickelung einer beliebigen Function in eine nach Bessel'schen Functionen von gleichem Index fortschreitende Reihe handelt. Wir können uns nicht versagen, diesen interessanten Satz in erweiterter Gestalt, übrigens jedoch in getreuem Anschluss an das Original, als neues Beispiel von der Mannigfaltigkeit der Eigenschaften der Bessel'schen Functionen, hier vorzuführen.

Gehen wir nämlich aus von der bekannten Fourier'schen Reihe,

$$F(z) = \tfrac{1}{2} A_0 + A_1 \cos\frac{\pi z}{h} + A_2 \cos\frac{2\pi z}{h} + \cdots,$$

wo

$$A_n = \frac{2}{h} \int_0^h F(u)\,.\,\cos\frac{n\pi u}{h}\, du$$

ist, und welche gilt für $h \geqq z \geqq 0$, setzen darin $h = \pi$, $z = vx$ und multipliciren die jetzt für $\pi \geqq vx \geqq 0$ giltige Gleichung

$$\begin{cases} F(vx) = \tfrac{1}{2} A_0 + A_1 \cos vx + A_2 \cos(2vx) + \cdots \\ A_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi F(u) \cos nu\, du \end{cases}$$

*) Schlömilch, Zeitschrift für Math. u. Phys. II. Jahrgang. S. 155.

beiderseits mit

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$$

und integriren sodann zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$, so erhalten wir

$$(1.) \quad \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{F(vx)}{\sqrt{1-v^2}} \cdot dv = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 J^0(x) + A_2 J^0(2x) + A_3 J^0(3x) + \cdots$$

Da v die Einheit nicht überschritten hat, gilt diese Gleichung von $x = 0$ bis $x = \pi$. Setzen wir nunmehr

$$(2.) \quad \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{F(vx)}{\sqrt{1-v^2}} \cdot dv = f(x)\,,$$

so ergibt sich durch Differentiation nach x:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{v\,F'(vx)}{\sqrt{1-v^2}} \cdot dv = f'(x)\,.$$

Wir schreiben jetzt in dieser Gleichung s statt v, μt statt x, multipliciren beiderseits mit $\mu \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ und integriren nach t zwischen den Grenzen $t = 0$ und $t = 1$; dadurch ergibt sich

$$\frac{2\mu}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\int_0^1 \frac{s\,F'(\mu s t)}{\sqrt{1-s^2}}\,ds = \mu\int_0^1 \frac{f'(\mu t)}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dt$$

oder nach einem bekannten Satze*):

---

*) Schlömilch hat von dem hier in Anwendung kommenden, von Abel herrührenden Satze folgenden Beweis gegeben. Durch gewöhnliche doppelte Integration findet man zunächst:

$$\int_0^\mu \int_0^{\sqrt{\mu^2-x^2}} \frac{F'(x)\,.\,dx\,dy}{\sqrt{\mu^2-x^2-y^2}} = \frac{\pi}{2}\Big[F(\mu) - F(0)\Big]\,.$$

Dieses Doppelintegral verwandelt sich durch Einführung von Polarcoordinaten ($x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$) in das folgende

$$\int_0^\mu \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F'(r\cos\vartheta)\,r\,dr\,d\vartheta}{\sqrt{\mu^2-r^2}}$$

$$F(\mu) - F(0) = \mu \int_0^1 \frac{f'(\mu t)}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dt\,.$$

Für $x = 0$ erhält man aus (2.) $F(0) = f(0)$, mithin ist

$$F(\mu) = f(0) + \mu \int_0^1 \frac{f'(\mu t)}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dt\,.$$

Wir schreiben nun in Gleichung (1.) $f(x)$ statt des Integrales zur Linken, drücken zur Rechten $F(u)$, welches in A_n enthalten ist, vermittelst der vorstehenden Gleichung durch $f(u)$ aus, und gelangen dadurch zu dem Satze, dass **die beliebige Function $f(x)$ unter der Bedingung $\pi \geqq x \geqq 0$ in die Reihe**

(3.) $f(x) = \frac{1}{2} A_0 + A_1 J^0(x) + A_2 J^0(2x) + A_3 J^0(3x) + \cdots$

entwickelt werden kann, wenn die Coefficienten A nach der Formel

$$\text{(3.a.)} \qquad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u \cos nu\, du \int_0^1 \frac{f'(ut)}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dt$$

bestimmt werden.

Setzen wir in Gleichung (3.) $\sqrt{x}$ statt x, so lautet dieselbe

$$f(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} A_0 + \sum A_{p+1} \cdot J^0((p+1)\sqrt{x})\,.$$

Nun ist aber (nach III.$_0$ §. 3.)

$$\frac{\partial^m J^0((p+1)\sqrt{x})}{\partial x^m} = (-\tfrac{1}{2})^m (p+1)^m \cdot x^{-\frac{m}{2}} J^m((p+1)\sqrt{x})\,.$$

Differentiiren wir daher oben beiderseits $m$mal nach x, so ergibt sich:

$$\frac{\partial^m f(\sqrt{x})}{\partial x^m} = (-\tfrac{1}{2})^m \sum (p+1)^m A_{p+1} \cdot x^{-\frac{m}{2}} J^m((p+1)\sqrt{x})$$

---

und daraus wird für $r = \mu s$ und $\cos\vartheta = t$

$$\mu \int_0^1 \int_0^1 \frac{F'(\mu st)\, s\, ds\, dt}{\sqrt{1-s^2}\,.\sqrt{1-t^2}}\,.$$

Man hat daher

$$\mu \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \int_0^1 \frac{s\, F'(\mu st)\,.\, ds}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{\pi}{2} \Big[F(u) - F(0)\Big]\,,$$

d. i. die oben im Texte gebrauchte Formel.

oder, wenn man

$$\frac{\partial^m f(\sqrt{x})}{\partial x^m} = x^{-\frac{m}{2}} \varphi(\sqrt{x})$$

und

$$(-\tfrac{1}{2})^m (p+1)^m A_{p+1} = B_{p+1}$$

setzt:

$$\varphi(\sqrt{x}) = \sum B_{p+1} J^m((p+1)\sqrt{x}) .$$

Setzen wir darin x^2 statt x, so erhalten wir folgenden Lehrsatz:

Die beliebige Function $\varphi(x)$ kann unter der Bedingung $\pi \geqq x \geqq 0$ in die Reihe

$$(4.) \quad \varphi(x) = B_1 J^m(x) + B_2 J^m(2x) + B_3 J^m(3x) + \cdots$$

verwandelt werden, wenn nur die Coefficienten B vermittelst der Formel

$$(4.a.) \quad B_n = (-\tfrac{1}{2})^m \cdot n^m \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u \cos nu\, du \int_0^1 \frac{f'(ut)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

und die Function $f(u)$ aus der Gleichung

$$(4.b.) \quad \frac{\partial^m f(\sqrt{x})}{\partial x^m} = x^{-\frac{m}{2}} \varphi(\sqrt{x})$$

bestimmt werden.

Nehmen wir z. B. $m = 1$, so ist

$$\frac{\partial f(\sqrt{x})}{\partial x} = \frac{\varphi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

oder, wenn darin x mit u^2 vertauscht wird

$$\frac{\partial f(u)}{\partial u} = f'(u) = 2\varphi(u) .$$

Wir erhalten daher folgende, ebenfalls von Schlömilch bereits gefundene Entwickelung:

$$\varphi(x) = B_1 J^1(x) + B_2 J^1(2x) + B_3 J^1(3x) + \cdots$$

worin

$$B_n = -\frac{2n}{\pi} \int_0^\pi u \cos nu\, du \int_0^1 \frac{\varphi(ut)}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dt$$

zu nehmen, und welche gilt für $\pi \geqq x \geqq 0$.

Zweiter Abschnitt.

Die Bessel'schen Functionen zweiter Art.

---

§. 21. Die Functionen $\mathfrak{J}^{\nu}_{(z)}$ und $\mathfrak{Y}^{\nu}_{(z)}$.

Wir gehen von der Gleichung (III.a.), nämlich von

$$\frac{\partial^m\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{-\frac{\nu+m}{2}} J^{\nu+m}_{(\sqrt{z})}$$

aus, differentiiren dieselbe beiderseits nach ν und erhalten

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m}\left(\frac{\partial\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial \nu}\right) = (-\tfrac{1}{2})^m \cdot \frac{\partial\left(z^{-\frac{\nu+m}{2}} J^{\nu+m}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial \nu}.$$

Nun leuchtet ein, dass $\frac{\partial\left(z^{-\frac{\nu+m}{2}} J^{\nu+m}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial \nu}$ genau in derselben Weise aus z und $\nu+m$ zusammengesetzt ist, wie $\frac{\partial\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial \nu}$ aus z und ν. Setzen wir daher

$$z^{-\frac{\nu}{2}} \mathfrak{J}^{\nu}_{(\sqrt{z})} = \frac{\partial\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial \nu}$$

oder, was dasselbe ist

$$(1.) \qquad z^{-\nu} \mathfrak{J}^{\nu}_{(z)} = \frac{\partial\left(z^{-\nu} J^{\nu}_{(z)}\right)}{\partial \nu},$$

so lautet obige Gleichung:

$$(2.) \qquad \frac{\partial^m\left(z^{-\frac{\nu}{2}} \mathfrak{J}^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{-\frac{\nu+m}{2}} \mathfrak{J}^{\nu+m}_{(\sqrt{z})}.$$

Wir sind also durch dieses Verfahren zu einer neuen Function $\mathfrak{J}^{\nu}_{(z)}$ gelangt, welche sich dem Grundgesetz (III.) der Bessel'schen Functionen unterwirft. Es ist klar, dass wir durch wiederholtes Differentiiren der Gleichung (III.a.) nach ν beliebig viele solche

Functionen erhalten könnten, welche mit der Function $J_{(z)}^{\nu}$ die genannte Eigenschaft theilen. Für unsere jetzigen Zwecke genügt es aber, bei der einmaligen Differentiation stehen zu bleiben.

Wenden wir dasselbe Verfahren auf die Gleichung (IV. a.), nämlich auf

$$\frac{\partial^m \left(z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{\frac{\nu-m}{2}} J^{\nu-m}_{(\sqrt{z})}$$

an, so finden wir

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m}\left(\frac{\partial\left(z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial \nu}\right) = (\tfrac{1}{2})^m \cdot \frac{\partial\left(z^{\frac{\nu-m}{2}} J^{\nu-m}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial \nu},$$

d. h., wenn wir

$$z^{\frac{\nu}{2}} \mathfrak{Y}^{\nu}_{(\sqrt{z})} = \frac{\partial\left(z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial \nu}$$

oder, was dasselbe ist

$$z^{\nu} \mathfrak{Y}^{\nu}_{(z)} = \frac{\partial\left(z^{\nu} J^{\nu}_{(z)}\right)}{\partial \nu} \tag{3.}$$

setzen:

$$\frac{\partial^m \left(z^{\frac{\nu}{2}} \mathfrak{Y}^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{\frac{\nu-m}{2}} \mathfrak{Y}^{\nu-m}_{(\sqrt{z})}. \tag{4.}$$

Wir sind sonach zu einer zweiten Function $\mathfrak{Y}^{\nu}_{(z)}$ gelangt, welche mit der Bessel'schen Function $J^{\nu}_{(z)}$ die Eigenschaft (IV.) gemein hat.

Um die Functionen $\mathfrak{J}^{\nu}_{(z)}$ und $\mathfrak{Y}^{\nu}_{(z)}$ durch bestimmte Integrale ausgedrückt zu erhalten, braucht man nur die Gleichungen (1.) und (3.) auf die Definition (I.) der Function $J^{\nu}_{(z)}$ anzuwenden. Man erhält zunächst

$$z^{-\nu} \mathfrak{J}^{\nu}_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \frac{1}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\, d\omega \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega \cdot \log\sin^2\omega \,.\, d\omega \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\right) \int_0^{\pi} \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega \,.\, d\omega \right\}.$$

Darin ist

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\right) = -\,\frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\left(\frac{\frac{\partial\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\partial\nu}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} + \log 2\right)$$

$$= -\,\frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\left(\frac{\partial \log\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\partial\nu} + \log 2\right)$$

oder, wenn wir die Gauss'sche Bezeichnung

$$\frac{\partial \log\Gamma(1+x)}{\partial x} = \psi(x)$$

einführen:

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\right) = -\,\frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\,(\psi(\nu-\tfrac{1}{2}) + \log 2)\,.$$

Wir haben demnach

$$z^{-\nu}\,\mathfrak{J}^\nu_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,.\,2^\nu\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\left\{\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\log\sin^2\omega\,.\,d\omega\right.$$

$$\left.-\,(\psi(\nu-\tfrac{1}{2}) + \log 2)\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\,.\,d\omega\right\}$$

oder endlich, wenn man beiderseits mit z^ν multiplicirt:

$$\text{(5.)}\quad \mathfrak{J}^\nu_{(z)} = \frac{z^\nu}{\sqrt{\pi}\,.\,2^\nu\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\,.\,\log\sin^2\omega\,.\,d\omega$$

$$-\,(\psi(\nu-\tfrac{1}{2}) + \log 2)\,J^\nu_{(z)}\,.$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$z^\nu\,\mathfrak{Y}^\nu_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\frac{z^{2\nu}}{2^\nu\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\,.\,d\omega\right\}$$

$$= \frac{z^{2\nu}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\,.\,d\omega\right\}$$

$$+\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\frac{\partial z^{2\nu}}{\partial\nu}}{2^\nu\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\,.\,d\omega$$

$$= \frac{z^{2\nu}}{\sqrt{\pi}\,.\,2^\nu\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\left\{\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\,.\,\log z^2\sin^2\omega\,.\,d\omega\right.$$

$$\left.-\,(\psi(\nu-\tfrac{1}{2}) + \log 2)\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\,.\,d\omega\right\}$$

oder, wenn noch beiderseits mit $z^{-\nu}$ multiplicirt worden ist:

$$(6.)\quad \mathfrak{Y}^{\nu}_{(z)} = \frac{z^{\nu}}{\sqrt{\pi}.2^{\nu}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_{0}^{\pi}\cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega.\log z^2\sin^2\omega.d\omega$$
$$-\left(\psi(\nu-\tfrac{1}{2})+\log 2\right)J^{\nu}_{(z)}.$$

Diese beiden Gleichungen (5.) und (6.) gelten für jedes $\nu > -\frac{1}{2}$.

Zieht man die 5. Gleichung von der 6. ab, so ergibt sich zwischen den Functionen $\mathfrak{Z}^{\nu}_{(z)}$ und $\mathfrak{Y}^{\nu}_{(z)}$ der Zusammenhang:

$$(7.)\quad \mathfrak{Y}^{\nu}_{(z)} - \mathfrak{Z}^{\nu}_{(z)} = 2\log z\,.\,J^{\nu}_{(z)}.$$

Schreibt man in dieser Gleichung wieder $\sqrt{z}$ statt z, multiplicirt zuerst mit $z^{\frac{\nu}{2}}$, dann mit $z^{-\frac{\nu}{2}}$, und differentiirt $m$mal nach z, so erhält man

$$\frac{\partial^m\left(z^{\frac{\nu}{2}}\mathfrak{Z}^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})\,z^{\frac{\nu-m}{2}}\mathfrak{Y}^{\nu-m}_{(\sqrt{z})} - \frac{\partial^m\left(\log z\,.\,z^{\frac{\nu}{2}}J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m}$$

$$\frac{\partial^m\left(z^{-\frac{\nu}{2}}\mathfrak{Y}^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m\,z^{-\frac{\nu+m}{2}}\mathfrak{Z}^{\nu+m}_{(\sqrt{z})} + \frac{\partial^m\left(\log z\,.\,z^{-\frac{\nu}{2}}J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m}.$$

Eliminirt man mittelst der Gleichung (7.) aus der ersten dieser Formeln $\mathfrak{Y}^{\nu-m}$, aus der zweiten $\mathfrak{Z}^{\nu+m}$, so folgt

$$(8.)\quad \frac{\partial^m\left(z^{\frac{\nu}{2}}\mathfrak{Z}^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})^m z^{\frac{\nu-m}{2}}\mathfrak{Z}^{\nu-m}_{(\sqrt{z})} + (\tfrac{1}{2})^m\log z\,.\,z^{\frac{\nu-m}{2}}J^{\nu-m}_{(\sqrt{z})}$$
$$-\frac{\partial^m\left(\log z\,.\,z^{\frac{\nu}{2}}J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m},$$

$$(9.)\quad \frac{\partial^m\left(z^{-\frac{\nu}{2}}\mathfrak{Y}^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m\,.\,z^{-\frac{\nu+m}{2}}\mathfrak{Y}^{\nu+m}_{(\sqrt{z})} - (-\tfrac{1}{2})^m\log z\,.\,z^{-\frac{\nu+m}{2}}J^{\nu+m}_{(\sqrt{z})}$$
$$+\frac{\partial^m\left(\log z\,.\,z^{-\frac{\nu}{2}}J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m}.$$

Von den Functionen $\mathfrak{Z}^{\nu}_{(z)}$ und $\mathfrak{Y}^{\nu}_{(z)}$ genügt also jede nur einem der beiden Gesetze (III.) und (IV.), woraus wir sofort den Schluss ziehen können, dass die Reductionsformel (II.) für keine von beiden gelten wird.

Die den Functionen $\mathfrak{Z}^{\nu}_{(z)}$ und $\mathfrak{Y}^{\nu}_{(z)}$ zugehörigen Reductionsformeln erhält man aber unmittelbar, wenn man die Gleichung

$$J^{\nu}_{(z)} = \frac{2(\nu-1)}{z} J^{\nu-1}_{(z)} - J^{\nu-2}_{(z)}$$

zuerst mit $z^{-\nu}$, dann mit z^{ν} multiplicirt und beidemal nach ν differentiirt. Es ergibt sich so:

$$(10.)\qquad \mathfrak{J}^{\nu}_{(z)} = \frac{2(\nu-1)}{z}\mathfrak{J}^{\nu-1}_{(z)} - \mathfrak{J}^{\nu-2}_{(z)} + \frac{2}{z} J^{\nu-1}_{(z)},$$

$$(11.)\qquad \mathfrak{Y}^{\nu}_{(z)} = \frac{2(\nu-1)}{z}\mathfrak{Y}^{\nu-1}_{(z)} - \mathfrak{Y}^{\nu-2}_{(z)} + \frac{2}{z} J^{\nu-1}_{(z)}.$$

Es hat keine Schwierigkeit, die in den Formeln (8.) und (9.) noch vorkommenden $m$ten Differentialquotienten in Gestalt von endlichen nach Bessel'schen Functionen und negativen Potenzen von z geordneten Reihen herzustellen. Man findet nämlich

$$\frac{\partial^m\left(\log z \,.\, z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = \sum \frac{m^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{\partial^p \log z}{\partial z^p} \cdot \frac{\partial^{m-p}\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^{m-p}}$$

oder, wenn man, um von der Summe zur Rechten das erste Glied abzutrennen, zuerst $p = 0$, dann $p+1$ statt p setzt:

$$\frac{\partial^m\left(\log z \,.\, z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m \,.\, \log z \,.\, z^{-\frac{\nu+m}{2}} J^{\nu+m}_{(\sqrt{z})}$$

$$+ \sum \frac{m^{p+1|-1}}{(p+1)!} \cdot \frac{\partial^{p+1}\log z}{\partial z^{p+1}} \cdot \frac{\partial^{m-p-1}\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^{m-p-1}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial^{p+1}\log z}{\partial z^{p+1}} = \frac{\partial^p z^{-1}}{\partial z^p} = (-1)^{p|-1} z^{-p-1} = (-1)^p \cdot \frac{p!}{z^{p+1}},$$

ferner

$$\frac{\partial^{m-p-1}\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^{m-p-1}} = (-\tfrac{1}{2})^{m-p-1} z^{-\frac{\nu+m-p-1}{2}} J^{\nu+m-p-1}_{(\sqrt{z})}.$$

Folglich hat man

$$(12.)\qquad \frac{\partial^m\left(\log z \,.\, z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m \log z \,.\, z^{-\frac{\nu+m}{2}} J^{\nu+m}_{(\sqrt{z})}$$

$$- (-\tfrac{1}{2})^m \cdot \sum 2^{p+1} \cdot \frac{m^{p+1|-1}}{p+1} \cdot \frac{J^{\nu+m-p-1}_{(\sqrt{z})}}{z^{\frac{\nu+m+p+1}{2}}}.$$

Ebenso leicht ergibt sich

$$(13.)\quad \frac{\partial^m\left(\log z\,.\,z^{\frac{\nu}{2}}\,J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})^m \log z\,.\,z^{\frac{\nu-m}{2}}\,J^{\nu-m}_{(\sqrt{z})}$$

$$+ (\tfrac{1}{2})^m\,.\sum (-1)^p\,.\,2^{p+1}\,.\,\frac{m^{p+1|-1}}{p+1}\,.\,\frac{J^{\nu-m+p+1}_{(\sqrt{z})}}{z^{\frac{-\nu+m+p+1}{2}}}\,.$$

§. 22. Die Function $L^{m}_{(z)}$.

Die beiden letzten Formeln des vorhergehenden Paragraphen treffen für $\nu = 0$ in der folgenden zusammen:

$$(1.)\quad \frac{\partial^m\left(\log z\,.\,J^{0}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m \log z\,.\,z^{-\frac{m}{2}}\,J^{m}_{(\sqrt{z})}$$

$$-\,(-\tfrac{1}{2})^m\,.\sum 2^{p+1}\,.\,\frac{m^{p+1|-1}}{p+1}\,.\,\frac{J^{m-p-1}_{(\sqrt{z})}}{z^{\frac{m+p+1}{2}}}\,.$$

Wir setzen nun

$$(2.)\quad L^{m}_{(z)} = \log z\,.\,J^{m}_{(z)} - \tfrac{1}{2}\sum 2^{p+1}\,.\,\frac{m^{p+1|-1}}{p+1}\,.\,\frac{J^{m-p-1}_{(z)}}{z^{p+1}}\,,$$

so dass

$$(2.\,a.)\quad L^{0}_{(z)} = \log z\,.\,J^{0}_{(z)}$$

ist; dann lautet obige Gleichung in dieser neuen Bezeichnungsweise ganz einfach

$$(3.)\quad \frac{\partial^m\,L^{0}(\sqrt{z})}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m\,z^{-\frac{m}{2}}\,L^{m}(\sqrt{z})\,.$$

Differentiiren wir diese Formel noch n mal nach z, so ergibt sich

$$\frac{\partial^{m+n}\,L^{0}(\sqrt{z})}{\partial z^{m+n}} = (-\tfrac{1}{2})^m\,.\,\frac{\partial^n\left(z^{-\frac{m}{2}}\,L^{m}(\sqrt{z})\right)}{\partial z^n}$$

oder, weil nach (3.)

$$\frac{\partial^{m+n}\,L^{0}(\sqrt{z})}{\partial z^{m+n}} = (-\tfrac{1}{2})^{m+n}\,.\,z^{-\frac{m+n}{2}}\,L^{m+n}(\sqrt{z})$$

ist:

$$(4.)\quad \frac{\partial^n\left(z^{-\frac{m}{2}}\,L^{m}(\sqrt{z})\right)}{\partial z^n} = (-\tfrac{1}{2})^n\,.\,z^{-\frac{m+n}{2}}\,L^{m+n}(\sqrt{z})\,.$$

Wir haben demnach eine neue Function, die durch Gleichung (2.) definirte Function $L^{m}_{(z)}$, gefunden, welche dem Grundgesetz (III.) der Bessel'schen Functionen genügt.

Eine der Gleichung (II. §. 1.) analoge Reductionsformel ergibt sich auf folgendem Wege.

Addirt man die beiden Gleichungen

$$L_{(z)}^{m-1} = \log z \, J_{(z)}^{m-1} - \tfrac{1}{2} \sum 2^{p+1} \frac{(m-1)^{p+1|-1}}{p+1} \cdot \frac{J_{(z)}^{m-p-2}}{z^{p+1}},$$

$$L_{(z)}^{m+1} = \log z \, J_{(z)}^{m+1} - \tfrac{1}{2} \sum 2^{p+1} \frac{(m+1)^{p+1|-1}}{p+1} \cdot \frac{J_{(z)}^{m-p}}{z^{p+1}},$$

so erhält man, mit Rücksicht auf die Gleichung

$$J_{(z)}^{m-p-2} = \frac{2}{z} (m-p-1) \, J_{(z)}^{m-p-1} - J_{(z)}^{m-p}$$

vorerst, und indem man der Kürze wegen bei den L und J das Argument z zu schreiben unterlässt

$$\begin{aligned} L^{m-1} + L^{m+1} &= \frac{2m}{z} \log z \, J^m \\ &- \tfrac{1}{2} \sum 2^{p+2} \cdot \frac{(m-1)^{p+1|-1}}{p+1} (m-p-1) \cdot \frac{J^{m-p-1}}{z^{p+2}} \\ &+ \tfrac{1}{2} \sum 2^{p+1} \cdot \frac{(m-1)^{p+1|-1}}{p+1} \cdot \frac{J^{m-p}}{z^{p+1}} \\ &- \tfrac{1}{2} \sum 2^{p+1} \cdot \frac{(m+1)^{p+1|-1}}{p+1} \cdot \frac{J^{m-p}}{z^{p+1}}. \end{aligned}$$

Nun sondern wir von jeder der beiden letzteren Summen die Anfangsglieder, welche resp. $+\frac{m-1}{z} J^m$ und $-\frac{m+1}{z} J^m$ sind, und zusammen $-\frac{2}{z} J^m$ geben, ab und fassen dann beide, nachdem p durch $p+1$ ersetzt worden, in eine zusammen, welche, da

$$\begin{aligned} \frac{(m-1)^{p+2|-1}}{p+2} - \frac{(m+1)^{p+2|-1}}{p+2} &= \frac{(m-1)^{p|-1}}{p+2} \Big[(m-p-1)(m-p-2) - m(m+1)\Big] \\ &= -(m-1)^{p|-1} (2m-p-1) \end{aligned}$$

ist, wie folgt lautet:

$$-\tfrac{1}{2} \sum 2^{p+2} \cdot (m-1)^{p|-1} (2m-p-1) \cdot \frac{J^{m-p-1}}{z^{p+2}}.$$

Diese Summe hat man nun noch mit der ersten zu vereinigen. Es ist aber

$$\begin{aligned} &\frac{(m-1)^{p+1|-1}}{p+1} (m-p-1) + (m-1)^{p|-1} (2m-p-1) \\ &= \frac{(m-1)^{p|-1}}{p+1} \Big[(m-(p+1))^2 + (2m-(p+1))(p+1)\Big] \\ &= \frac{(m-1)^{p|-1}}{p+1} \cdot m^2 = m \cdot \frac{m^{p+1|-1}}{p+1}. \end{aligned}$$

Wir haben also schliesslich

$$L^{m-1} + L^{m+1} = \frac{2m}{z} \log z \, J^m - \frac{2}{z} J^m$$

$$- \frac{2m}{z} \cdot \frac{1}{2} \sum 2^{p+1} \cdot \frac{m^{p+1|-1}}{p+1} \cdot \frac{J^{m-p-1}}{z^{p+1}}$$

oder

$$(5.) \qquad \frac{2m}{z} L^m_{(z)} = L^{m-1}_{(z)} + L^{m+1}_{(z)} + \frac{2}{z} J^m_{(z)}$$

oder auch

$$(5. a.) \qquad L^m_{(z)} = \frac{2(m-1)}{z} L^{m-1}_{(z)} - L^{m-2}_{(z)} - \frac{2}{z} J^m_{(z)} .$$

§. 23. Die Bessel'sche Function zweiter Art $Y^m_{(z)}$.

Wir nennen jede Function eine Bessel'sche, welche, an die Stelle der J gesetzt, zweien von den drei Grundgleichungen (II., III. und IV.) Genüge leistet. Sie unterwirft sich dann jedesmal auch der dritten, welche eine einfache Consequenz der beiden anderen ist, und ausserdem allen Relationen, welche im ersten Abschnitt für die Function J, die Bessel'sche Function erster Art, bloss aus jenen Grundgleichungen abgeleitet worden sind. Eine neue Function mit den genannten Eigenschaften, eine Bessel'sche Function zweiter Art, erhalten wir nun durch Addition der Functionen $\mathfrak{J}^m_{(z)}$ und $L^m_{(z)}$. Addirt man nämlich zur Gleichung (10. §. 21.), nachdem man in ihr das beliebig reelle ν durch das positiv ganze m ersetzt hat, d. h. also zur Gleichung

$$\mathfrak{J}^m_{(z)} = \frac{2(m-1)}{z} \mathfrak{J}^{m-1}_{(z)} - \mathfrak{J}^{m-2}_{(z)} + \frac{2}{z} J^{m-1}_{(z)} ,$$

die letzte Gleichung des vorhergehenden Paragraphen, nämlich

$$L^m_{(z)} = \frac{2(m-1)}{z} L^{m-1}_{(z)} - L^{m-2}_{(z)} - \frac{2}{z} J^{m-1}_{(z)} ,$$

so ergibt sich

$$\mathfrak{J}^m_{(z)} + L^m_{(z)} = \frac{2(m-1)}{z} (\mathfrak{J}^{m-1}_{(z)} + L^{m-1}_{(z)}) - (\mathfrak{J}^{m-2}_{(z)} + L^{m-2}_{(z)}) ,$$

welche keine andere als die Gleichung (II.) ist, mit dem Unterschied, dass die Summe $\mathfrak{J}^m + L^m$ an der Stelle von J^m steht.

Setzt man ferner in Gleichung (2. §. 21.) m statt ν und n statt m, und addirt die so erhaltene Gleichung

$$\frac{\partial^n \left(z^{-\frac{m}{2}} \mathfrak{J}^m_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^n} = (-\tfrac{1}{2})^n z^{-\frac{m+n}{2}} \mathfrak{J}^{m+n}_{(\sqrt{z})}$$

zur Gleichung (4.) des vorhergehenden Paragraphen, nämlich zu

$$\frac{\partial^n\left(z^{-\frac{m}{2}} L^{m}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^n} = (-\tfrac{1}{2})^n z^{-\frac{m+n}{2}} L^{m+n}_{(\sqrt{z})},$$

so folgt

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left[z^{-\frac{m}{2}}(\mathfrak{J}^{m}_{(\sqrt{z})} + L^{m}_{(\sqrt{z})})\right] = (-\tfrac{1}{2})^n \cdot z^{-\frac{m+n}{2}}(\mathfrak{J}^{m+n}_{(\sqrt{z})} + L^{m+n}_{(\sqrt{z})})$$

und man erkennt, dass die Summe $\mathfrak{J}^m + L^m$ auch dem zweiten Grundgesetz (III.) sich fügt. Nach unserer Auffassung muss daher die Summe $\mathfrak{J}^m + L^m$ eine Bessel'sche Function, und zwar zum Unterschied von der im ersten Abschnitt betrachteten Function J, eine **Bessel'sche Function zweiter Art** genannt werden.

Sowie es eine Function L^m gibt, welche zu $\mathfrak{J}^m$ hinzugefügt, eine Bessel'sche Function hervorbringt, so wird es auch noch eine Function Λ^m geben müssen, welche mit $\mathfrak{Y}^m$ zusammengenommen ebenfalls eine Bessel'sche Function erzeugt. Wir können dieses Verhalten dadurch ausdrücken, dass wir sagen, L^m sei zu $\mathfrak{J}^m$, Λ^m zu $\mathfrak{Y}^m$ **complementär**. Aus Gleichung (7. §. 21.) erkennt man aber sogleich, dass die zu $\mathfrak{Y}^m$ complementäre Function

$$\Lambda^{m}_{(z)} = L^{m}_{(z)} - 2 \log z \, J^{m}_{(z)}$$

oder

$$\Lambda^{m}_{(z)} = -\log z \, J^{m}_{(z)} - \tfrac{1}{2} \sum 2^{p+1} \cdot \frac{m^{p+1|-1}}{p+1} \cdot \frac{J^{m-p-1}_{(z)}}{z^{p+1}}$$

sein wird, und dass für sie die Gleichungen

$$\Lambda^{m}_{(z)} = \frac{2(m-1)}{z} \Lambda^{m-1}_{(z)} - \Lambda^{m-2}_{(z)} - \frac{2}{z} J^{m-1}_{(z)}$$

und

$$\frac{\partial^n\left(z^{\frac{m}{2}} \Lambda^{m}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^n} = (\tfrac{1}{2})^n \cdot z^{\frac{m-n}{2}} \Lambda^{m-n}_{(\sqrt{z})}$$

gelten. Die Summe $\mathfrak{Y}^m + \Lambda^m$ ist dann ebenfalls eine Bessel'sche Function und zwar mit $\mathfrak{J}^m + L^m$ vollkommen identisch.

Da die Grundgleichungen (II., III. und IV.) hinsichtlich der Functionen J^m und $\mathfrak{J}^m + L^m$ linearer Natur sind, so werden ihnen nicht nur diese Functionen an und für sich, sondern ebensogut auch die Function

$$a \, J^{m}_{(z)} + b\,(\mathfrak{J}^{m}_{(z)} + L^{m}_{(z)})$$

Genüge leisten, wo unter a und b beliebige von z unabhängige Grössen zu denken sind. Durch Hinzufügung des Gliedes $a \, J^{m}_{(z)}$

wird in den von uns aufgestellten Begriff der Bessel'schen Function zweiter Art nichts Neues und Fremdartiges hineingetragen, und wir können daher, solange b nicht Null ist, vorstehenden Ausdruck als die allgemeinste Form der Bessel'schen Function zweiter Art betrachten. Wir können ferner durch zweckmässige Bestimmung der Constanten a und b unserer Function eine möglichst einfache Gestalt geben und diese sodann als Typus der Bessel'schen Functionen zweiter Art hinstellen.

Setzen wir zu diesem Zwecke, und namentlich um die in $\mathfrak{J}^m_{(z)}$ vorkommende Function $\psi(m-\frac{1}{2})$ wegzubringen, $b=1$ und $a=\psi(m-\frac{1}{2})+\log 2$, so erhalten wir als einfachsten Ausdruck für die Bessel'sche Function zweiter Art

$$\text{(I.}\alpha.) \qquad Y^m_{(z)} = \frac{z^m}{\pi \,.\, 1^{m|2}} \int_0^\pi \cos(z\cos\omega) \,.\, \sin^{2m}\omega \log\sin^2\omega \,.\, d\omega$$
$$+ \log z \,.\, J^m_{(z)} - \tfrac{1}{2} \sum 2^{p+1} \,.\, \frac{m^{p+1|-1}}{p+1} \,.\, \frac{J^{m-p-1}_{(z)}}{z^{p+1}}$$

oder auch

$$\text{(I.}\beta.) \qquad Y^m_{(z)} = K^m_{(z)} + L^m_{(z)},$$

worin

$$\text{(I.}\gamma.) \qquad \begin{cases} K^m_{(z)} = \dfrac{z^m}{\pi \,.\, 1^{m|2}} \displaystyle\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2m}\omega \log\sin^2\omega \,.\, d\omega \\ L^m_{(z)} = \log z \,.\, J^m_{(z)} - \tfrac{1}{2} \displaystyle\sum 2^{p+1} \,.\, \frac{m^{p+1|-1}}{p+1} \,.\, \frac{J^{m-p-1}_{(z)}}{z^{p+1}} \end{cases}$$

ist. Diese Formeln, weniger allgemein, als die für die Bessel'sche Function erster Art gegebenen, gelten nur für positiv ganze Werthe von m, die Null mit inbegriffen.

Setzen wir z. B. $m=0$, so gewinnt der Ausdruck für $Y^0_{(z)}$ folgende einfache Gestalt

$$\text{(I.}\delta.) \qquad Y^0_{(z)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z\cos\omega) \log(z\sin^2\omega) \,.\, d\omega \,.$$

Wir bemerken hiezu noch, dass die hier eingeführte Function $K^m_{(z)}$ mit $\mathfrak{J}^m_{(z)}$ die in den Gleichungen

$$K^m_{(z)} = \frac{2(m-1)}{z} K^{m-1}_{(z)} - K^{m-2}_{(z)} + \frac{2}{z} J^{m-1}_{(z)}$$

und

$$\frac{\partial^n \left(z^{-\frac{m}{2}} \overset{m}{K}(\sqrt{z}) \right)}{\partial z^n} = (-\tfrac{1}{2})^n \cdot z^{-\frac{m+n}{2}} \overset{m+n}{K}(\sqrt{z})$$

ausgesprochenen Eigenschaften theilt.

Endlich mögen noch die wichtigeren derjenigen Formeln, welche für Y^m wie für J^m in gleicher Weise gelten, hier eine Zusammenstellung finden.

$$\text{(II.)} \qquad Y^m_{(z)} = \frac{2(m-1)}{z} Y^{m-1}_{(z)} - Y^{m-2}_{(z)}$$

$$\text{(II.}\alpha\text{.)} \qquad \frac{2m}{z} Y^m_{(z)} = Y^{m-1}_{(z)} - Y^{m+1}_{(z)}$$

$$\text{(II.}\beta\text{.)} \qquad Y^{m+1} = Y^1 \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \frac{(2p+2)^{m-2p|2}}{z^{m-2p}}$$

$$- Y^0 \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \frac{(2p+4)^{m-1-2p|2}}{z^{m-1-2p}}$$

$$\text{(III.)} \qquad \frac{\partial^n \left(z^{-\frac{m}{2}} \overset{m}{Y}(\sqrt{z}) \right)}{\partial z^n} = (-\tfrac{1}{2})^n z^{-\frac{m+n}{2}} \overset{m+n}{Y}(\sqrt{z})$$

$$\text{(IV.)} \qquad \frac{\partial^n \left(z^{\frac{m}{2}} \overset{m}{Y}(\sqrt{z}) \right)}{\partial z^n} = (\tfrac{1}{2})^n z^{\frac{m-n}{2}} \overset{m-n}{Y}(\sqrt{z})$$

$$\frac{\partial^{2m} \left(z^{\frac{m}{2}} \overset{m}{Y}(\sqrt{z}) \right)}{\partial z^{2m}} = (-1)^m \cdot \frac{z^{-\frac{m}{2}}}{2^{2m}} \overset{m}{Y}(\sqrt{z})$$

$$2 \frac{\partial Y^m_{(z)}}{\partial z} = Y^{m-1}_{(z)} - Y^{m+1}_{(z)}$$

$$\frac{\partial^n Y^m_{(z)}}{\partial z^n} = (\tfrac{1}{2})^n \sum (-1)^p \cdot \frac{n^{p|-1}}{p!} Y^{m-n+2p}_{(z)}$$

$$\frac{2m}{z} \cdot \frac{\partial (Y^m_{(z)})^2}{\partial z} = (Y^{m-1}_{(z)})^2 - (Y^{m+1}_{(z)})^2$$

$$Y^{-m}_{(z)} = (-1)^m Y^m_{(z)}$$

$$\text{(VI.)} \qquad (z+h)^{-\frac{m}{2}} \overset{m}{Y}(\sqrt{z+h}) = \sum (-1)^p \cdot \frac{h^p}{2^{p|2}} z^{-\frac{m+p}{2}} \overset{m+p}{Y}(\sqrt{z})$$

$$\text{(VII.)} \qquad (z+h)^{\frac{m}{2}} \overset{m}{Y}(\sqrt{z+h}) = \sum \frac{h^p}{2^{p|2}} z^{\frac{m-p}{2}} \overset{m-p}{Y}(\sqrt{z})$$

$$Y^m_{(\lambda z)} = \lambda^m \sum (-1)^p \frac{(\lambda^2-1)^p}{2^{p|2}} z^p Y^{m+p}_{(z)} .$$

§. 24. Entwickelung von $\mathfrak{J}^{\nu}_{(z)}$ und $K^{m}_{(z)}$ nach Potenzen von z.

Nach Formel (VIII.) des §. 5. ist

$$J^{\nu}_{(z)} = \sum (-1)^p \frac{z^{\nu+2p}}{2^{p|2}\, 2^{\nu+p}\, \Gamma(\nu+p+1)},$$

also

$$z^{-\nu} J^{\nu}_{(z)} = \sum (-1)^p \cdot \frac{z^{2p}}{2^{p|2}\, 2^{\nu+p}\, \Gamma(\nu+p+1)}.$$

Wir differentiiren hier beiderseits nach ν, nach Anleitung der Gleichung (1. §. 21.), welche die Definition von $\mathfrak{J}^{\nu}_{(z)}$ ausspricht, und erhalten

$$z^{-\nu} \mathfrak{J}^{\nu}_{(z)} = \sum (-1)^p \cdot \frac{z^{2p}}{2^{p|2}} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{2^{\nu+p}\, \Gamma(\nu+p+1)} \right).$$

Darin ist

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{2^{\nu+p}\, \Gamma(\nu+p+1)} \right) = - \frac{1}{2^{\nu+p}\, \Gamma(\nu+p+1)} \left(\frac{\partial \log \Gamma(\nu+p+1)}{\partial \nu} + \log 2 \right)$$

$$= - \frac{1}{2^{\nu+p}\, \Gamma(\nu+p+1)} \left(\psi(\nu+p) + \log 2 \right).$$

Wir haben demnach

$$\mathfrak{J}^{\nu}_{(z)} = - \sum (-1)^p \cdot \frac{z^{\nu+2p}}{2^{p|2}\, 2^{\nu+p}\, \Gamma(\nu+p+1)} \left(\psi(\nu+p) + \log 2 \right)$$

oder

$$\mathfrak{J}^{\nu}_{(z)} = - J^{\nu}_{(z)} . \log 2 - \sum (-1)^p \cdot \frac{\psi(\nu+p)\, z^{\nu+2p}}{2^{p|2}\, 2^{\nu+p}\, \Gamma(\nu+p+1)}.$$

Die Reihe zur Rechten convergirt für jeden Werth von z. Denn der absolute Werth des Quotienten des $(p+2)^{\text{ten}}$ durch das vorhergehende Glied, d. i.:

$$\frac{z^2}{(2p+2)(2\nu+2p+2)} \cdot \frac{\psi(\nu+p+1)}{\psi(\nu+p)}$$

nähert sich bei wachsendem p, was immer auch z sein mag, der Grenze Null. Da nämlich

$$\psi(\nu+p+1) = \psi(\nu+p) + \frac{1}{\nu+p},$$

also

$$\frac{\psi(\nu+p+1)}{\psi(\nu+p)} = 1 + \frac{1}{(\nu+p)\,\psi(\nu+p)}$$

ist, so nähert sich $\frac{\psi(\nu+p+1)}{\psi(\nu+p)}$, wenn p zunimmt, dem Grenzwerthe 1.

Aus obiger Formel für $J^{\nu}_{(z)}$ erhält man sofort diejenige für $K^{m}_{(z)}$, wenn man, nachdem ν durch das positiv ganze m ersetzt ist, beiderseits $(\psi(m-\frac{1}{2}) + \log 2)\, J^{m}_{(z)}$ addirt. Zerlegt man gleichzeitig $\psi(m+p)$ nach der Gleichung

$$\psi(m+p) = \psi(m) + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{m+p},$$

so findet man

$$K^{m}_{(z)} = (\psi(m-\tfrac{1}{2}) - \psi(m))\, J^{m}_{(z)}$$

$$- \sum (-1)^{p+1} \frac{z^{m+2p+2}}{2^{p+1|2}\, 2^{m+p+1|2}} \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{m+p+1}\right).$$

Nun ist

$$\psi(m-\tfrac{1}{2}) - \psi(m) = 2\,\psi(2m) - 2\,\psi(m) - 2 \log 2$$

oder, da

$$\psi(m) = \psi(0) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}$$

$$\psi(m-\tfrac{1}{2}) - \psi(m) = 2\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m}\right) - 2 \log 2$$

$$= 2 \sum_{q=0}^{q=m-1} \frac{1}{m+1+q} - 2 \log 2 .$$

Wir haben also endlich

$$(\text{VIII}.\alpha.) \quad K^{m}_{(z)} = \left(2 \sum_{q=0}^{q=m-1} \frac{1}{m+1+q} - 2 \log 2\right) \cdot J^{m}_{(z)}$$

$$+ \sum \left[(-1)^{p} \cdot \frac{z^{m+2p+2}}{2^{p+1|2}\, 2^{m+p+1|2}} \sum_{q=0}^{q=p} \frac{1}{m+1+q} \right]$$

und speciell für $m = 0$ und $m = 1$

$$(\text{VIII}.\beta.) \begin{cases} K^{0}_{(z)} = -2 \log 2 \,.\, J^{0}_{(z)} + \sum \left[(-1)^{p} \cdot \dfrac{z^{2p+2}}{(2^{p+1|2})^{2}} \displaystyle\sum_{q=0}^{q=p} \frac{1}{1+q} \right] \\[2ex] K^{1}_{(z)} = (1 - 2 \log 2)\, J^{1}_{(z)} + \sum \left[(-1)^{p} \cdot \dfrac{z^{2p+3}}{2^{p+1|2}\, 2^{p+2|2}} \displaystyle\sum_{q=0}^{q=p} \frac{1}{2+q} \right]. \end{cases}$$

Die nämlichen Resultate hätte man auch, allerdings mit grösserer Mühe, gefunden, indem man in der Formel

$$(z+h)^{-\frac{\nu}{2}}\, \overset{\nu}{\mathfrak{J}}(\sqrt{z+h}) = \sum (-1)^{p} \cdot \frac{h^{p}}{2^{p|2}}\, z^{-\frac{\nu+p}{2}}\, J^{\nu+p}(\sqrt{z})$$

$z = 0$ und $h = z^{2}$ gesetzt und sodann in

$$z^{-\nu}\mathfrak{J}^{\nu}_{(z)} = \sum (-1)^p \cdot \frac{z^{2p}}{2^{p|2}} \left(\frac{\mathfrak{J}^{\nu+p}_{(z)}}{z^{\nu+p}}\right)_{z=0}$$

den Ausdruck

$$\left(\frac{\mathfrak{J}^{\nu+p}_{(z)}}{z^{\nu+p}}\right)_{z=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,.\,2^{\nu+p}\,.\,\Gamma(\nu+p+\frac{1}{2})}\int_0^{\pi} \sin^{2\nu+2p}\omega\,.\,\log\sin^2\omega\,.\,d\omega$$

$$-\left(\psi(\nu+p-\tfrac{1}{2})+\log 2\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}\,.\,2^{\nu+p}\,\Gamma(\nu+p+\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}\sin^{2\nu+2p}\omega\cdot d\omega$$

unmittelbar durch Integration bestimmt hätte.

§. 25. Verschiedene Reihen.

Um für die Bessel'sche Function zweiter Art Reihenentwickelungen zu bekommen, die denen des §. 9. analog sind, setzen wir in Gleichung (VII. §. 23.) $h = -z$, und erhalten zunächst

$$\sum (-1)^p \cdot \frac{z^{\frac{m+p}{2}}}{2^{p|2}}\, Y^{m-p}_{(\sqrt{z})} = \left(z^m\, Y^m_{(z)}\right)_{z=0}.$$

Nun ist aber

$$z^m\, Y^m_{(z)} = \frac{z^{2m}}{\pi\,.\,1^{m|2}}\int_0^{\pi}\cos(z\cos\omega)\sin^{2m}\omega\log\sin^2\omega\,.\,d\omega$$

$$+\, z^m\log z\,.\,J^m_{(z)} - \tfrac{1}{2}\sum 2^{p+1}\cdot\frac{m^{p+1|-1}}{p+1}\, z^{m-p-1}\, J^{m-p-1}_{(z)}.$$

Setzt man darin $z = 0$, so verschwindet, unter der Voraussetzung, dass $m > 1$ ist, zur Rechten Alles, mit Ausnahme des letzten Gliedes der Summe $\sum$, in welchem $p = m - 1$ ist. Man hat daher

$$\left(z^m\, Y^m_{(z)}\right)_{z=0} = -\,2^{m-1}\,(m-1)! = -\,2^{m-1|2}.$$

Dieser Werth werde oben eingesetzt, gleichzeitig z^2 statt z und $m+1$ statt m (um der Bedingung $m > 1$ zu genügen) geschrieben und endlich noch beiderseits mit z^{m+1} dividirt, so kommt

$$\sum (-1)^p \cdot \frac{z^p}{2^{p|2}}\, Y^{m+1-p}_{(z)} = -\,\frac{2^{m|2}}{z^{m+1}}.$$

Unterwirft man diese Gleichung derselben Reihenfolge von Operationen, welche in §. 9. mit der entsprechenden Gleichung (4.) vorgenommen wurden, so gelangt man zu der Formel

$$(1.)\quad \sum \frac{z^{m+1+p}}{2^{m+1+p|2}} Y^p_{(z)} = (-1)^m \cdot \frac{2^{m|2}}{z^{m+1}} + \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p \cdot \frac{z^{m-p}}{2^{m-p|2}} Y^{p+1}_{(z)},$$

d. h. specialisirt

$$(1.\alpha.)\quad \begin{cases} \frac{z}{2} Y^0 + \frac{z^2}{2\cdot 4} Y^1 + \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} Y^2 + \cdots \\ \qquad = \frac{1}{z} + Y^1 \\ \frac{z^2}{2\cdot 4} Y^0 + \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} Y^1 + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} Y^2 + \cdots \\ \qquad = -\frac{2}{z^2} + \frac{z}{2} Y^1 - Y^2 \\ \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} Y^0 + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} Y^1 + \frac{z^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} Y^2 + \cdots \\ \qquad = \frac{2\cdot 4}{z^3} + \frac{z^2}{2\cdot 4} Y^1 - \frac{z}{2} Y^2 + Y^3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Und lässt man diesen Gleichungen wieder dieselbe Behandlung angedeihen, welche im §. 7. an der analogen Gruppe geübt wurde, so findet man

$$(2.)\quad \begin{cases} Y^1 = \sum \frac{z^{p+1}}{2^{p+1|2}} Y^p - \frac{1}{z} \\ Y^2 = \sum \frac{(p+1)\, z^{p+2}}{2^{p+2|2}} Y^p - \frac{1}{2} - \frac{2}{z^2} \\ Y^3 = \sum \frac{(p+1)^{2|1}}{2!} \frac{z^{p+3}}{2^{p+3|2}} Y^p - \frac{z}{2\cdot 4} - \frac{1}{z} - \frac{2\cdot 4}{z^3} \\ Y^4 = \sum \frac{(p+1)^{3|1}}{3!} \cdot \frac{z^{p+4}}{2^{p+4|2}} Y^p - \frac{z^2}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{2}{2\cdot 4} - \frac{2\cdot 4}{2 z^2} - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{z^4} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{cases}$$

Jede dieser Gleichungen ergibt sich durch Differentiation der Vorhergehenden, indem man in dieser $\sqrt{z}$ statt z setzt, beiderseits mit $z^{-\frac{m+1}{2}}$ multiplicirt (unter $m+1$ den Index von Y zur Linken in der fraglichen Gleichung verstanden) und dann zur Linken die Grundgleichung (III.), zur Rechten unter dem Summenzeichen aber (IV.) anwendet. Durch diese Gruppe von Formeln kann also jede Bessel'sche Function zweiter Art, von Y^1 an, durch alle übrigen und durch eine rationale Function von z ausgedrückt werden.

Die Gleichung (VI.) ist einer analogen Behandlung nicht fähig, weil $z^{-m} Y^m_{(z)}$ für $z = 0$ unendlich gross wird. Wohl aber kann dieses Verfahren auf die Function $K^m_{(z)}$ angewendet werden, welche der nämlichen Gleichung (VI.) Genüge leistet. Setzen wir also in

$$(z+h)^{-\frac{m}{2}} K^m_{(\sqrt{z+h})} = \sum (-1)^p \cdot \frac{h^p}{2^{p|2}} \cdot z^{-\frac{m+p}{2}} K^{m+p}_{(\sqrt{z})}$$

$h = -z$, so folgt

$$\sum \frac{z^{\frac{p-m}{2}}}{2^{p|2}} K^{m+p}_{(\sqrt{z})} = \left(\frac{K^m_{(z)}}{z^m}\right)_0 .$$

Zufolge Gleichung (VIII. α.) des vorausgehenden Paragraphen ist aber

$$\left(\frac{K^m_{(z)}}{z^m}\right)_{z=0} = 2\left(\sum_{q=0}^{q=m-1} \frac{1}{m+1+q} - \log 2\right)\left(\frac{J^m_{(z)}}{z^m}\right)_{z=0}$$

$$= \frac{2}{2^{m|2}}\left(\sum_{q=0}^{q=m-1} \frac{1}{m+1+q} - \log 2\right).$$

Setzt man diesen Werth oben ein, schreibt auch z^2 statt z und multiplicirt sodann beiderseits mit z^m, so hat man

$$(3.) \quad \sum \frac{z^p}{2^{p|2}} K^{m+p}_{(z)} = \frac{2 z^m}{2^{m|2}}\left(\sum_{q=0}^{q=m-1} \frac{1}{m+1+q} - \log 2\right),$$

eine Formel, welche der Gleichung (3.) des §. 9. vollkommen analog ist. Für $m = 0$ z. B. lautet dieselbe:

$$(3.\alpha.) \quad K^0 + \frac{z}{2} K^1 + \frac{z^2}{2\cdot 4} K^2 + \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} K^3 + \cdots = -2 \log 2$$

u. s. w. f.

Die Eintwickelung von $Y^m_{(z+h)}$ findet man, indem man Schritt für Schritt den Weg verfolgt, der in §. 10. zur Entwickelung von $J^m_{(z+h)}$ führte. Man erhält auf diese Weise

$$(\text{IX}.\alpha.) \qquad Y^m_{(z+h)} = J^m_{(h)} Y^0_{(z)} + \Sigma J^{m-r-1}_{(h)} Y^{r+1}_{(z)} + \Sigma J^{m+r+1}_{(h)} \,.\, Y^{-(r+1)}_{(z)}$$

oder auch, weil z und h mit einander zertauscht werden können:

$$(\text{IX}.\beta.) \qquad Y^m_{(z+h)} = Y^0_{(h)} J^m_{(z)} + \Sigma Y^{r+1}_{(h)} J^{m-r-1}_{(z)} + \Sigma Y^{-(r+1)}_{(h)} \,.\, J^{m+r+1}_{(z)} .$$

Daraus folgt für $m = 0$

$$(\text{IX}.\gamma.) \qquad Y^0_{(z+h)} = J^0_{(h)} Y^0_{(z)} - 2 J^1_{(h)} Y^1_{(z)} + 2 J^2_{(h)} Y^2_{(z)} - 2 J^3_{(h)} Y^3_{(z)} + 2 J^4_{(h)} Y^4_{(z)} - \cdots$$

oder auch

(IX. δ.) $$Y^0_{(z+h)} = Y^0_{(h)} J^0_{(z)} - 2\, Y^1_{(h)} J^1_{(z)} + 2\, Y^2_{(h)} J^2_{(z)} - 2\, Y^3_{(h)} J^3_{(z)} + 2\, Y^4_{(h)} J^4_{(z)} - \cdots$$

Diese Formeln zeigen uns, dass $Y^m_{(z+h)}$ sowohl nach Bessel'schen Functionen erster Art als auch zweiter Art entwickelt werden kann.

§. 26. Entwickelung von $Y^m_{(z)}$ nach negativen Potenzen von z.

Nach §. 17, Gleichung (1.) ist

$$J^\nu_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\left\{e^{i\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)}(P+Qi) + e^{-i\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)}(P-Qi)\right\},$$

folglich

$$z^{-\nu} J^\nu_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\left\{e^{i\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)-\nu\log z}(P+Qi) + e^{-i\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)-\nu\log z}(P-Qi)\right\}.$$

Differentiirt man diese Gleichung, die Definition von $\mathfrak{Y}^\nu_{(z)}$ (1. §. 21.) beachtend, beiderseits nach ν, und multiplicirt nachträglich wieder mit z^ν, so erhält man

$$\mathfrak{Y}^\nu_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\left\{e^{i\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)}(P+Qi)(-\log z - \tfrac{1}{2}\pi i) + e^{-i\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)}(P-Qi)(-\log z + \tfrac{1}{2}\pi i)\right\}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\left\{e^{i\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)}(P'+Q'i) + e^{-i\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)}(P'-Q'i)\right\}$$

oder, was dasselbe ist

$$\mathfrak{Y}^\nu_{(z)} = -\log z \,.\, J^\nu_{(z)} - \tfrac{1}{2}\pi i \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\left\{e^{i\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)}(P+Qi) - e^{-i\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)}(P-Qi)\right\}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\left\{e^{i\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)}(P'+Q'i) + e^{-i\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)}(P'-Q'i)\right\},$$

worin P' und Q' die nach ν genommenen Ableitungen von P und Q bedeuten. Die hier anzuwendenden Werthe von P und Q

gehen aber aus P^m und Q^m (Gl. 4. §. 16.) hervor, wenn man in diesen m durch $\nu - \frac{1}{2}$ ersetzt; danach ist

$$(1.)\quad \begin{cases} P = \sum (-1)^p \cdot \dfrac{(2\nu+1)^{2p|2}(2\nu-1)^{2p|-2}}{8^{2p|8}} \cdot \dfrac{1}{z^{2p}} \\[2ex] \quad = 1 - \sum (-1)^p \cdot \dfrac{(2\nu+1)^{2p+2|2}(2\nu-1)^{2p+2|-2}}{8^{2p+2|8}} \cdot \dfrac{1}{z^{2p+2}} \\[2ex] Q = \sum (-1)^p \cdot \dfrac{(2\nu+1)^{2p+1|2}(2\nu-1)^{2p+1|-2}}{8^{2p+1|8}} \cdot \dfrac{1}{z^{2p+1}}. \end{cases}$$

Um daraus P' und Q' zu erhalten, muss zuerst

$$\frac{\partial (2\nu+1)^{r+1|2}(2\nu-1)^{r+1|-2}}{\partial \nu}$$

bestimmt werden. Es ist aber

$$\log (2\nu+1)^{r+1|2}(2\nu-1)^{r+1|-2}$$
$$= \sum_{q=0}^{q=r} \log(2\nu+1+2q) + \sum_{q=0}^{q=r} \log(2\nu-1-2q),$$

folglich, wenn man hier beiderseits nach ν differentiirt:

$$\left(\frac{\partial (2\nu+1)^{r+1|2}(2\nu-1)^{r+1|-2}}{\partial \nu}\right) : (2\nu+1)^{r+1|2}(2\nu-1)^{r+1|-2}$$
$$= \sum_{q=0}^{q=r} \frac{2}{2\nu+1+2q} + \sum_{q=0}^{q=r} \frac{2}{2\nu-1-2q}.$$

Wir erhalten sodann nach gehöriger Substitution:

$$(2.)\quad \begin{cases} P' = -2 \sum (-1)^p \left(\displaystyle\sum_{q=0}^{q=2p+1} \frac{1}{2\nu+1+2q} \right. \\[2ex] \quad \left. + \displaystyle\sum_{q=0}^{q=2p+1} \frac{1}{2\nu-1-2q} \right) \cdot \dfrac{(2\nu+1)^{2p+2|2}(2\nu-1)^{2p+2|-2}}{8^{2p+2|8}} \cdot \dfrac{1}{z^{2p+2}} \\[2ex] Q' = 2 \sum (-1)^p \left(\displaystyle\sum_{q=0}^{q=2p} \frac{1}{2\nu+1+2q} \right. \\[2ex] \quad \left. + \displaystyle\sum_{q=0}^{q=2p} \frac{1}{2\nu-1-2q} \right) \cdot \dfrac{(2\nu+1)^{2p+2|2}(2\nu-1)^{2p+1|-2}}{8^{2p+1|8}} \cdot \dfrac{1}{z^{2p+1}} \end{cases}$$

und haben sonach die Function $\mathfrak{J}^{\nu}_{(z)}$ nach negativen Potenzen von z entwickelt.

Die entsprechende Entwickelung von $Y^m_{(z)}$ selbst erhalten wir daraus sofort, wenn wir, nachdem ν durch das positiv ganze m ersetzt ist,

$$(\psi(m-\tfrac{1}{2}) + \log 2)\, J^m_{(z)} + L^m_{(z)}$$

hinzuzählen. Berücksichtigen wir gleichzeitig, dass

$$i\left\{e^{i\zeta}(P+Qi) - e^{-i\zeta}(P-Qi)\right\} = -2\,(P\sin\zeta + Q\cos\zeta)$$

und

$$e^{i\zeta}(P'+Q'i) + e^{-i\zeta}(P'-Q'i) = 2\,(P'\cos\zeta - Q'\sin\zeta)$$

ist (wo nur der Kürze wegen ζ statt $z - \frac{2m+1}{4}\pi$ geschrieben wurde), so haben wir

$$(3.)\quad Y^m_{(z)} = (\psi(m-\tfrac{1}{2})+\log 2)\, J^m_{(z)} - \tfrac{1}{2}\sum 2^{p+1}\cdot\frac{m^{p+1|-1}}{p+1}\cdot\frac{J^{m-p-1}_{(z)}}{z^{p+1}}$$
$$+\tfrac{1}{2}\pi.\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{P\sin\left(z-\frac{2m+1}{4}\pi\right)+Q\cos\left(z-\frac{2m+1}{4}\pi\right)\right\}$$
$$+\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{P'\cos\left(z-\frac{2m+1}{4}\pi\right)-Q'\sin\left(z-\frac{2m+1}{4}\pi\right)\right\}.$$

Darin ist

$$\psi(m-\tfrac{1}{2}) = \psi(-\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{1}{m+\frac{1}{2}}$$

oder $\psi(m-\tfrac{1}{2}) = \psi(0) - 2\log 2 + 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2m+1}\right)$,

wo $\psi(0)$ die sogenannte Constante des Integrallogarithmen, nämlich

$$\psi(0) = -0{,}57721566490153286\,06\cdots$$

ist. Statt P, Q, P', Q' sind die bereits oben gegebenen Formeln, nur m statt ν gesetzt, zu gebrauchen.

Für $m = 0$ ist

$$\sum_{q=0}^{q=r}\frac{1}{1+2q} + \sum_{q=0}^{q=r}\frac{1}{-1-2q} = 0$$

und darum auch $P' = 0$ und $Q' = 0$; man hat daher einfach

$$(4.)\quad Y^0_{(z)} = (\psi(0) - \log 2)\, J^0_{(z)}$$
$$+\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{P_0\sin(z-\tfrac{1}{4}\pi) + Q_0\cos(z-\tfrac{1}{4}\pi)\right\}$$

und dabei

$$(4.a.)\quad \begin{cases} P_0 = \sum(-1)^p\cdot\dfrac{(1^{2p|2})^2}{8^{2p|8}}\cdot\dfrac{1}{z^{2p}} \\ Q_0 = -\sum(-1)^p\cdot\dfrac{(1^{2p+1|2})^2}{8^{2p+1|8}}\cdot\dfrac{1}{z^{2p+1}}\,. \end{cases}$$

Für $m = 1$ dagegen hat man

$$\sum_{q=0}^{q=r}\frac{1}{2q+3}-\sum_{q=0}^{q=r}\frac{1}{2q-1}=\sum_{q=0}^{q=r}\frac{1}{2q+3}+1-1-\sum_{q=0}^{q=r-2}\frac{1}{2q+3}$$

$$=\sum_{q=0}^{q=r-2}\frac{1}{2q+3}+\frac{1}{2r+1}+\frac{1}{2r+3}-\sum_{q=0}^{q=r-2}\frac{1}{2q+3}$$

$$=\frac{1}{2r+1}+\frac{1}{2r+1}.$$

Dann ist

$$Y^1_{(z)}=\left(\psi(0)+\tfrac{2}{3}-\log 2\right)J^1_{(z)}-\frac{J^0_{(z)}}{z}$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{P_1\cos(z-\tfrac{1}{4}\pi)-Q_1\sin(z-\tfrac{1}{4}\pi)\right\}$$
$$+\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{P_1'\sin(z-\tfrac{1}{4}\pi)+Q_1'\cos(z-\tfrac{1}{4}\pi)\right\} \tag{5.}$$

und dabei

$$\left\{\begin{aligned}P_1&=1+\sum(-1)^p\cdot\frac{3^{2p+2|2}\,1^{2p+1|2}}{8^{2p+2|8}}\cdot\frac{1}{z^{2p+2}}\\ Q_1&=\sum(-1)^p\cdot\frac{3^{2p+1|2}\,1^{2p|2}}{8^{2p+1|8}}\cdot\frac{1}{z^{2p+1}}\\ P_1'&=2\sum(-1)^p\cdot\frac{8p+8}{4p+3}\cdot\frac{3^{2p+1|2}\,1^{2p+1|2}}{8^{2p+2|8}}\cdot\frac{1}{z^{2p+2}}\\ Q_1'&=2\sum(-1)^p\cdot\frac{8p+4}{4p+1}\cdot\frac{3^{2p|2}\,1^{2p|2}}{8^{2p+1|8}}\cdot\frac{1}{z^{2p+1}}.\end{aligned}\right. \tag{5.a.}$$

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich, für einigermassen grosse z, die Werthe von Y^0 und Y^1 und mittelst der Formel (3.) überhaupt die Werthe von $Y^m_{(z)}$ bequem berechnen.

Die vorkommenden unendlichen Reihen gehören, wie diejenigen des §. 17., zur Classe der halbconvergenten.

Bei stets wachsendem z nähern sich die Werthe der Reihen Q, P' und Q' der Grenze 0, derjenige der Reihe P aber der Grenze 1; auch die Glieder der in dem Ausdrucke (3.) für $Y^m_{(z)}$ vorkommenden endlichen Reihe

$$\tfrac{1}{2}\sum 2^{p+1}\cdot\frac{m^{p+1|-1}}{p+1}\cdot\frac{J^{m-p-1}_{(z)}}{z^{p+1}}$$

gehen, wie man sich leicht überzeugen wird, bei wachsendem z gegen Null. Da nun ferner, wenn man die Gleichungen (11. §. 17.) in eine zusammenfasst

$$J_{(z)}^m = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos\left(z - \frac{2m+1}{4}\pi\right)$$

ist, so hat man für ein äusserst grosses z:

$$(6.) \quad Y_{(z)}^m = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \left(\psi(m-\tfrac{1}{2}) + \log 2\right) \cos\left(z - \frac{2m+1}{4}\pi\right) + \tfrac{1}{2}\pi \sin\left(z - \frac{2m+1}{4}\pi\right) \right\}.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich erkennen, dass die Differerenz zweier aufeinanderfolgenden Wurzeln der Gleichung $Y_{(z)}^m = 0$ sich der Grenze π nähert, wenn z stets zunimmt.

Dritter Abschnitt.

Lineare Differentialgleichungen, welche durch Bessel'sche Functionen integrirt werden.

§. 27. Aufsuchung einer Function y von z derart, dass

$$\frac{\partial^2\left(z^m y^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{y})\right)}{\partial z^2} = f(z) \, . \, z^m \, . \, y^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{y}) \text{ **wird.**}$$

Die zu Ende des §. 4. abgeleitete Formel

$$\frac{\partial^{2m}\left(z^{\frac{m}{2}} \overset{m}{J}(\sqrt{z})\right)}{\partial z^{2m}} = (-1)^m \, . \, \frac{z^{-\frac{m}{2}}}{2^{2m}} \overset{m}{J}(\sqrt{z}) \, ,$$

welche auch für Bessel'sche Functionen zweiter Art giltig bleibt, zeigt uns, dass es möglich ist, durch wiederholte Differentiation eines Ausdrucks, der eine Bessel'sche Function enthält, zu einem Ausdruck zu gelangen, der genau dieselbe Bessel'sche Function enthält. Es liegt nach dieser Bemerkung nahe, zu untersuchen, welche Function y von z man statt z in $\overset{\nu}{J}(\sqrt{z})$ einzusetzen habe, damit man durch wiederholte Differentiation wieder auf die nämliche Function J^ν zurückkomme.

Wir beschränken uns bei dieser Untersuchung auf 2malige Differentiation des Ausdrucks $z^m y^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{y})$ nach z und erhalten mit Anwendung der Grundformel (III.) zunächst:

$$\frac{\partial\left(z^m y^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{y})\right)}{\partial z} = -\tfrac{1}{2} z^m y^{-\frac{\nu+1}{2}} \overset{\nu+1}{J}(\sqrt{y}) \cdot \frac{\partial y}{\partial z}$$
$$+ m z^{m-1} y^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{y})$$

und nochmals differentiirend:

$$\frac{\partial^2 \left(z^m y^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{y})} \right)}{\partial z^2} = -\tfrac{1}{2} z^m y^{-\frac{\nu+1}{2}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{y})} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$$

$$+ \tfrac{1}{4} z^m y^{-\frac{\nu+2}{2}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{y})} \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 - m z^{m-1} y^{-\frac{\nu+1}{2}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{y})} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot$$

$$+ m(m-1) z^{m-2} y^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{y})} .$$

Nun ist aber nach (II.):

$$J^{\nu+2}_{(\sqrt{y})} = \frac{2\nu+2}{\sqrt{y}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{y})} - J^{\nu}_{(\sqrt{y})} ,$$

folglich, wenn man diesen Werth in die vorige Gleichung einsetzt:

$$\frac{\partial^2 \left(z^m y^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{y})} \right)}{\partial z^2} = -\tfrac{1}{2} z^m \cdot y^{-\frac{\nu+1}{2}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{y})} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$$

$$+ \frac{\nu+1}{2} z^m y^{-\frac{\nu+3}{2}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{y})} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 - \tfrac{1}{4} z^m y^{-\frac{\nu+2}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{y})} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2$$

$$- m z^{m-1} y^{-\frac{\nu+1}{2}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{y})} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + m(m-1) z^{m-2} y^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{y})} .$$

Man hat demnach

$$(1.) \qquad \frac{\partial^2 \left(z^m y^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{y})} \right)}{\partial z^2}$$

$$= \left[m(m-1) z^{m-2} - \frac{z^m}{4y} \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 \right] \cdot y^{-\frac{\nu}{2}} \cdot J^{\nu}_{(\sqrt{y})} ,$$

wenn man nur y als Function von z aus der Differentialgleichung

$$-\tfrac{1}{2} z^m y^{-\frac{\nu+1}{2}} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{\nu+1}{2} z^m y^{-\frac{\nu+3}{2}} \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 - m z^{m-1} y^{-\frac{\nu+1}{2}} \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

bestimmt hat.

In dieser Differentialgleichung, welche vereinfacht so lautet:

$$(2.) \qquad zy \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - (\nu+1) z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 + 2my \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = 0 ,$$

setzen wir zunächst

$$\frac{\partial y}{\partial z} = uy \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = vy .$$

Sie geht dann über in

$$zv - (\nu+1) zu^2 + 2mu = 0$$

und liefert

$$v = (\nu+1) u^2 - 2m \frac{u}{z} ,$$

während

$$u\frac{\partial y}{\partial z}+y\frac{\partial u}{\partial z}=vy$$

ist. Setzt man in letztere Gleichung uy statt $\frac{\partial y}{\partial z}$, so wird sie

$$\frac{\partial u}{\partial z}+u^2-v=0$$

oder, nach Einführung des obigen Werthes von v:

$$\frac{\partial u}{\partial z}-\nu u^2+2m\frac{u}{z}=0$$

oder auch

$$(3.)\qquad \frac{1}{u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{2m}{z}-\nu u=0\,.$$

Nun setzen wir

$$z^{2m}u=w \qquad \text{und} \qquad z^{-\nu}=x$$

und erhalten

$$z^{2m}\frac{\partial u}{\partial z}+2m\,z^{2m-1}u=\frac{\partial w}{\partial z}$$

oder, durch w beiderseits dividirend

$$(4.)\qquad \frac{1}{u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{2m}{z}=\frac{1}{w}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\,.$$

Ferner ist

$$-\nu z^{-\nu-1}=\frac{\partial x}{\partial z},$$

d. h.

$$(5.)\qquad \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{\nu}{z}\,.$$

Eliminirt man nun mittelst der Gleichungen (4.) und (5.) $\frac{1}{u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{2m}{z}$ und ν aus der Gleichung (3.), so wird diese:

$$\frac{1}{w}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{zu}{x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}=0\,.$$

Da aber

$$z=x^{-\frac{1}{\nu}}$$

und

$$u=wx^{\frac{2m}{\nu}},$$

folglich

$$\frac{zu}{x}=w\,.\,x^{\frac{2m-\nu-1}{\nu}}$$

ist, so erhält man die Gleichung

$$\frac{1}{w}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}+wx^{\frac{2m-\nu-1}{\nu}}\frac{\partial x}{\partial z}=0\,,$$

welche in der Form

$$(6.)\qquad \frac{\partial w}{w^2} + x^{\frac{2m-\nu-1}{\nu}} \cdot \partial x = 0$$

unmittelbar integrirt werden kann. Man erhält durch ihre Integration, wenn man unter C eine willkührliche Constante versteht:

$$-\frac{1}{w} + \frac{\nu}{2m-1} x^{\frac{2m-1}{\nu}} = C.$$

Führen wir nun statt w und x wieder u und z zurück, so erhalten wir

$$u = -\frac{z^{-2m}}{C - \frac{\nu}{2m-1} z^{-2m+1}}$$

oder, weil

$$u = \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z}$$

ist:

$$\frac{\partial y}{y} = -\frac{z^{-2m} \partial z}{C - \frac{\nu}{2m-1} \cdot z^{-2m+1}}.$$

Diese Gleichung, integrirt, gibt

$$\log y = -\frac{1}{\nu} \log K \left(C - \frac{\nu}{2m-1} \cdot z^{-2m+1}\right),$$

wo K eine zweite willkührliche Constante bedeutet. Setzt man

$$CK = a \qquad \text{und} \qquad -\frac{\nu K}{2m-1} = b,$$

so dass jetzt a und b die beiden willkührlichen Constanten vorstellen, so hat man endlich

$$(7.)\qquad y = (a + b z^{-2m+1})^{-\frac{1}{\nu}}.$$

Substituirt man nun diese Function statt y in obige Gleichung (1.), so erhält man

$$(8.)\qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[z^m (a + b z^{-2m+1})^{\frac{1}{2}} J^\nu (a + b z^{-2m+1})^{-\frac{1}{2\nu}}\right]$$

$$= \left\{m(m-1) z^{m-2} - b^2 \left(\frac{2m-1}{2\nu}\right)^2 z^{-3m} (a + b z^{-2m+1})^{-\frac{2\nu+1}{\nu}}\right\}$$

$$\times (a + b z^{-2m+1})^{\frac{1}{2}} J^\nu (a + b z^{-2m+1})^{-\frac{1}{2\nu}}.$$

Zu der nämlichen Gleichung würde man gelangen, wenn man unter Anwendung von Formel (IV.) den Ausdruck

$$\frac{\partial^2 \left(z^m y^{\frac{\nu}{2}} J^\nu_{(\sqrt{y})}\right)}{\partial z^2}$$

auf analoge Weise behandeln würde.

Setzt man in (8.) $a = 0$, $b = 1$, so erhält man specieller

$$(9.)\qquad \frac{\partial^2\left(\sqrt{z}\,.\,J^\nu\left(z^{\frac{2m-1}{2\nu}}\right)\right)}{\partial z^2}$$

$$= \left\{m(m-1)\,z^{m-2} - \left(\frac{2m-1}{2\nu}\right)^2 z^{\frac{m(\nu+2)-(2\nu+1)}{\nu}}\right\} z^{-m}\,.\,\sqrt{z}\,.\,J^\nu\left(z^{\frac{2m-1}{2\nu}}\right)$$

und daraus wieder noch specieller für $m = 0$:

$$(10.)\qquad \frac{\partial^2\left(\sqrt{z}\,.\,J^\nu\left(z^{-\frac{1}{2\nu}}\right)\right)}{\partial z^2} = -\frac{z^{-\frac{2\nu+1}{\nu}}}{(2\nu)^2}\cdot\sqrt{z}\cdot J^\nu\left(z^{-\frac{1}{2\nu}}\right)$$

und für $m = 1$:

$$(11.)\qquad \frac{\partial^2\left(\sqrt{z}\,.\,J^\nu\left(z^{\frac{1}{2\nu}}\right)\right)}{\partial z^2} = -\frac{z^{\frac{1-2\nu}{\nu}}}{(2\nu)^2}\cdot\sqrt{z}\cdot J^\nu\left(z^{\frac{1}{2\nu}}\right).$$

§. 28. Fortsetzung.

Wenn $m = \frac{1}{2}$ gesetzt wird, so liefert der für y gefundene Ausdruck: $y = \text{Const.}$, ein bloss particuläres Integral der zu integrirenden Differentialgleichung. Behandelt man aber in diesem Falle die Gleichung

$$(1.)\qquad zy\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - (\nu+1)\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + y\cdot\frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

ganz wie oben, so erhält man zwischen w und x die Gleichung

$$\frac{\partial w}{w^2} + \frac{\partial x}{x} = 0,$$

woraus sofort

$$-\frac{1}{w} + \log x = C$$

hervorgeht. Da nun

$$w = zu \qquad x = z^{-\nu}$$

ist, so folgt weiter

$$-\frac{1}{zu} = C + \nu\log z,$$

d. i.

$$u = -\frac{\frac{1}{z}}{C + \nu\log z}$$

oder

$$\frac{\partial y}{y} = -\frac{\frac{\partial z}{z}}{C + \nu\log z},$$

woraus sofort

$$\log y = -\frac{1}{\nu}\log K\,(C + \nu \log z)$$

oder

(2.) $$y = (a + b\log z)^{-\frac{1}{\nu}}$$

folgt, wo jetzt a und b die beiden willkührlichen Constanten sind. Dann ist weiter

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{b}{\nu z}(a + b\log z)^{-\frac{\nu+1}{\nu}}$$

und

$$\frac{z^m}{4y}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 = \frac{b^2}{4\nu^2 z^{\frac{3}{2}}}(a + b\log z)^{-\frac{2\nu+1}{\nu}}.$$

Substituirt man diesen Werth nebst dem obigen Werthe von y in die Gleichung (1.) des vorhergehenden Paragraphen, so hat man:

(3.) $$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(z^{\frac{1}{2}}(a + b\log z)^{\frac{1}{2}} J^\nu (a + b\log z)^{-\frac{1}{2\nu}}\right)$$

$$= -\left\{1 + \frac{b^2}{\nu^2}(a + b\log z)^{-\frac{2\nu+1}{\nu}}\right\}\frac{z^{\frac{1}{2}}(a+b\log z)^{\frac{1}{2}}}{4z^2} J^\nu (a + b\log z)^{-\frac{1}{2\nu}}.$$

Setzt man darin speciell $\nu = -\frac{1}{2}$, so wird sie:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\sqrt{z(a+b\log z)}\, J^{-\frac{1}{2}}(a + b\log z)\right)$$

$$= -(1 + 4b^2)\frac{\sqrt{z(a+b\log z)}}{4z^2} J^{-\frac{1}{2}}(a + b\log z)$$

oder, weil nach §. 4.:

$$J_{(z)}^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cdot\cos z$$

ist:

(4.) $$\frac{\partial^2(\sqrt{z}\,.\cos(a + b\log z))}{\partial z^2} = -\frac{1+4b^2}{4z^2}\cdot\sqrt{z}\cdot\cos(a + b\log z).$$

Für $\nu = 0$ werden sämmtliche bisher gegebenen Integrale unserer Differentialgleichung (2.) des vorigen Paragraphen unzulässig. Alsdann aber wird dieselbe

(5.) $$z y\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 2\mu y\cdot\frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

und man erhält zwischen u und z die ohne Weiteres integrable Gleichung

$$\frac{\partial u}{u} + 2\mu\frac{\partial z}{z} = 0,$$

woraus sofort

$$u = C z^{-2\mu}$$

hervorgeht. Dann ist ferner

$$\frac{\partial y}{y} = C z^{-2\mu} \partial z,$$

folglich

$$\log y = C \cdot \frac{z^{-2\mu+1}}{-2\mu+1} + C'$$

oder

(6.) $$y = K e^{k z^{-2\mu+1}},$$

wo K und k die willkührlichen Constanten sind. Man erhält nun, wenn man $k = \log a$ und $K^{\frac{1}{2}} = b$ setzt:

(7.) $$\frac{\partial^2 \left(z^\mu J^0\left(b\, a^{\frac{1}{2} z^{-2\mu+1}}\right)\right)}{\partial z^2}$$

$$= \left\{\frac{\mu(\mu-1)}{z^2} - \frac{(b \log a)^2 (2\mu-1)^2}{4 z^{4\mu}} a^{z^{-2\mu+1}}\right\} z^\mu J^0\left(b\, a^{\frac{1}{2} z^{-2\mu+1}}\right).$$

Speciell ergibt sich für $b = 1$ und $\mu = 0$, und wenn a^2 statt a gesetzt wird:

(8.) $$\frac{\partial^2 J^0(a^z)}{\partial z^2} = -(\log a)^2 . a^{2z} J^0(a^z)$$

und ebenso für $b = 1$ und $\mu = 1$:

(9.) $$\frac{\partial^2 \left(z J^0\left(a^{\frac{1}{z}}\right)\right)}{\partial z^2} = -\frac{(\log a)^2}{z^4} a^{\frac{2}{z}} . z . J^0\left(a^{\frac{1}{z}}\right).$$

Sämmtliche in diesem und dem vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen gelten, wenn ν Null oder positiv ganz ist, nicht nur für J^m, sondern ebenso gut auch für die Bessel'sche Function zweiter Art Y^m.

§. 29. Die Bessel'sche Differentialgleichung.

Zufolge Gleichung (3. §. 2.) ist

(1.) $$\frac{\partial J^\nu_{(z)}}{\partial z} = \frac{\nu}{z} J^\nu_{(z)} - J^{\nu+1}_{(z)}.$$

Differentiirt man diese Gleichung nochmals nach z, so erhält man

$$\frac{\partial^2 J^\nu_{(z)}}{\partial z^2} = \frac{\nu}{z} \cdot \frac{\partial J^\nu_{(z)}}{\partial z} - \frac{\nu}{z^2} J^\nu_{(z)} - \frac{\partial J^{\nu+1}_{(z)}}{\partial z}$$

oder, wenn man auf die hier vorkommenden ersten Differentialquotienten die Gleichung (1.) anwendet:

$$\frac{\partial^2 J^\nu_{(z)}}{\partial z^2} = \frac{\nu^2}{z^2} J^\nu_{(z)} - \frac{\nu}{z} J^{\nu+1}_{(z)} - \frac{\nu}{z^2} J^\nu_{(z)} - \frac{\nu+1}{z} J^{\nu+1}_{(z)} + J^{\nu+2}_{(z)} .$$

Addirt man zu letzterer die mit z dividirte Gleichung (1.), nämlich

$$\frac{1}{z} \frac{\partial J^\nu_{(z)}}{\partial z} = \frac{\nu}{z^2} J^\nu_{(z)} - \frac{1}{z} J^{\nu+1}_{(z)} ,$$

so kommt

$$\frac{\partial^2 J^\nu_{(z)}}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial J^\nu_{(z)}}{\partial z} = \frac{\nu^2}{z^2} J^\nu_{(z)} - \frac{2(\nu+1)}{z} J^{\nu+1}_{(z)} + J^{\nu+2}_{(z)} .$$

Nach (II.) ist aber

$$\frac{2(\nu+1)}{z} J^{\nu+1}_{(z)} - J^{\nu+2}_{(z)} = J^\nu_{(z)} ,$$

folglich lautet obige Gleichung

$$(2.) \qquad \frac{\partial^2 J^\nu_{(z)}}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial J^\nu_{(z)}}{\partial z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) J^\nu_{(z)} = 0$$

und drückt in dieser Form eine Beziehung aus, welche zwischen jeder Bessel'schen Function und ihren beiden ersten Differentialquotienten stattfindet. Setzen wir nun in dieser Gleichung $J^\nu_{(z)} = y$, so wird sie

$$(3.) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0$$

und ist keine andere als die **Bessel'sche Differentialgleichung, jedoch insofern verallgemeinert, als wir unter ν jede beliebige reelle Zahl, also nicht bloss positive ganze Zahlen, verstehen.**

Ein particuläres Integral derselben ist nun

$$y = J^\nu_{(z)}$$

und da die Gleichung (3.) ungeändert bleibt, wenn wir $-\nu$ statt ν setzen, so ist auch

$$y = J^{-\nu}_{(z)}$$

ein particuläres Integral.

Die vollständige Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung lautet demnach (im Allgemeinen):

$$(4.) \qquad y = A J^\nu_{(z)} + B J^{-\nu}_{(z)} ,$$

wo A und B die zwei willkührlichen Constanten vorstellen.

Die Gleichung (4.) liefert so lange das vollständige Integral unserer Differentialgleichung, als ν nicht positiv oder negativ ganz oder Null ist. Ist nämlich ν ganz und zwar $= n$, so reducirt sich, weil in diesem Falle

$$(8.)\qquad A J^{\nu}_{(z)} + B J^{-\nu}_{(z)} = \frac{\alpha\cos z + \beta\sin z}{\sqrt{z}}$$

und für ein ganzes ν und ein äusserst grosses z

$$(9.)\qquad A J^{n}_{(z)} + B Y^{n}_{(z)} = \frac{\alpha\cos z + \beta\sin z}{\sqrt{z}} .$$

Wir ersehen daraus, dass für äusserst grosse Werthe von z die Bessel'sche Function sowohl erster als zweiter Art durch die Form

$$\frac{\alpha\cos z + \beta\sin z}{\sqrt{z}}$$

darstellbar ist, was uns übrigens durch die Gleichungen (11. §. 17.) und (6. §. 26.) bereits bekannt ist.

Schliesslich sei es noch gestattet, die hier ganz allgemein gelehrte Integration der Bessel'schen Differentialgleichung in einigen speciellen Fällen durchzuführen, namentlich um den dabei vorkommenden Gebrauch unserer Formel (V. §. 4.) zu zeigen.

Es sei zuerst $\nu = \frac{5}{4}$, so liefert die Gleichung (4.) sofort das vollständige Integral

$$y = A J^{\frac{5}{4}}_{(z)} + B J^{-\frac{5}{4}}_{(z)} .$$

Aus V. aber folgt, wenn daselbst $\nu = -\frac{5}{4}$ und $m = 2$ gesetzt wird:

$$J^{-\frac{5}{4}}_{(z)} = J^{\frac{11}{4}}_{(z)} - \frac{3}{z} J^{\frac{7}{4}}_{(z)} - \frac{3}{4z^3} J^{\frac{3}{4}}_{(z)} .$$

Demnach ist

$$(10.)\qquad y = A J^{\frac{5}{4}}_{(z)} + B\left(J^{\frac{11}{4}}_{(z)} - \frac{3}{z} J^{\frac{7}{4}}_{(z)} - \frac{3}{4z^2} J^{\frac{3}{4}}_{(z)}\right)$$

die vollständige Lösung der Differentialgleichung

$$(11.)\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} + \left[1 - \left(\frac{5}{4z}\right)^2\right]\cdot y = 0 .$$

Ferner sei, um ein sehr einfaches Beispiel zu wählen, $\nu = \frac{1}{2}$, das vollständige Integral sonach

$$y = A J^{\frac{1}{2}}_{(z)} + B J^{-\frac{1}{2}}_{(z)} ,$$

so ist gemäss (V.) für $\nu = -\frac{1}{2}$ und $m = 1$

$$J^{-\frac{1}{2}}_{(z)} = - J^{\frac{3}{2}}_{(z)} + \frac{J^{\frac{1}{2}}_{(z)}}{z} .$$

Nach (§. 16.) aber ist

$$J^{\frac{1}{2}}_{(z)} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cdot\sin z$$

$$J^{\frac{3}{2}}_{(z)} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right),$$

folglich

$$J_{(z)}^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos z$$

und demnach entspricht

(12.) $$y = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \, (A \sin z + B \cos z)$$

als vollständiges Integral der Gleichung

(13.) $$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \left(1 - \frac{1}{4z^2}\right) y = 0 \, .$$

Zu dem nämlichen Resultate wäre man übrigens auch gelangt, indem man Gebrauch gemacht hätte von der Bemerkung des §. 16, dass die beiden dort vorkommenden Functionen $R_{(z)}^{m+\frac{1}{2}}$ und $(-1)^m \, . \, R_{(-z)}^{m+\frac{1}{2}}$ jede für sich den Fundamentalgesetzen der Bessel'schen Functionen gehorchen. Dann muss auch jede für sich der Bessel'schen Differentialgleichung, welche wir aus jenen Grundgesetzen abgeleitet haben, genügen, d. h. jede muss ein particuläres Integral derselben sein. Für $m = 0$ aber ist

$$R_{(z)}^{\frac{1}{2}} = - i \cdot \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}} \quad \text{und} \quad R_{(-z)}^{\frac{1}{2}} = - \frac{e^{-iz}}{\sqrt{2\pi z}} \, ,$$

folglich hat man für die Gleichung (13.) das vollständige Integral

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \, (a e^{iz} + b e^{-iz})$$

oder

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left((a+b) \cos z + (a-b) i \, . \sin z\right)$$

oder endlich, wenn man $(a-b) i = 2A$, $a+b = 2B$ setzt:

$$y = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \, (A \sin z + B \cos z) \, ,$$

genau wie oben.

§. 30. Die Gleichung $z \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + a \frac{\partial y}{\partial z} \pm \frac{1}{4} y = 0$.

Wir gehen aus von der Gleichung

$$J_{(\sqrt{z})}^{\nu+2} = \frac{2(\nu+1)}{\sqrt{z}} \, J_{(\sqrt{z})}^{\nu+1} - J_{(\sqrt{z})}^{\nu}$$

und multipliciren dieselbe beiderseits mit $z^{-\frac{\nu+2}{2}}$. Dann heisst sie

$$z^{-\frac{\nu+2}{2}} J_{(\sqrt{z})}^{\nu+2} = \frac{2(\nu+1)}{z} \, z^{-\frac{\nu+1}{2}} J_{(\sqrt{z})}^{\nu+1} - \frac{1}{z} \, . \, z^{-\frac{\nu}{2}} J_{(\sqrt{z})}^{\nu}$$

und kann jetzt, weil

$$z^{-\frac{\nu+2}{2}} \overset{\nu+2}{J}(\sqrt{z}) = 4 \cdot \frac{\partial^2\left(z^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z})\right)}{\partial z^2}$$

und

$$z^{-\frac{\nu+1}{2}} \overset{\nu+1}{J}(\sqrt{z}) = -2 \cdot \frac{\partial\left(z^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z})\right)}{\partial z}$$

ist, auch in folgender Form geschrieben werden:

$$(1.)\ \frac{\partial^2\left(z^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z})\right)}{\partial z^2} + \frac{\nu+1}{z} \cdot \frac{\partial\left(z^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z})\right)}{\partial z} + \frac{1}{z} \cdot z^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z}) = 0.$$

Multipliciren wir dagegen die Gleichung

$$\overset{\nu}{J}(\sqrt{z}) = \frac{2(\nu-1)}{\sqrt{z}} \overset{\nu-1}{J}(\sqrt{z}) - \overset{\nu-2}{J}(\sqrt{z})$$

mit $z^{\frac{\nu}{2}}$, so dass sie die Form

$$z^{\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z}) = 2(\nu-1) z^{\frac{\nu-1}{2}} \overset{\nu-1}{J}(\sqrt{z}) - z \cdot z^{\frac{\nu-2}{2}} \overset{\nu-2}{J}(\sqrt{z})$$

annimmt, und berücksichtigen, dass

$$z^{\frac{\nu-2}{2}} \overset{\nu-2}{J}(\sqrt{z}) = 4 \frac{\partial^2\left(z^{\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z})\right)}{\partial z^2}$$

und

$$z^{\frac{\nu-1}{2}} \overset{\nu-1}{J}(\sqrt{z}) = 2 \cdot \frac{\partial\left(z^{\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z})\right)}{\partial z}$$

ist, so erhalten wir

$$(2).\ z \cdot \frac{\partial^2\left(z^{\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z})\right)}{\partial z^2} - (\nu-1) \frac{\partial\left(z^{\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z})\right)}{\partial z} + z^{\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z}) = 0.$$

Setzen wir nun in (1.) $z^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z}) = y$ und $\nu + 1 = a$, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$(3.)\qquad z \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + a \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \tfrac{1}{4} y = 0$$

sammt ihrem particulären Integral

$$y = z^{-\frac{a-1}{2}} \overset{a-1}{J}(\sqrt{z}).$$

Setzen wir ebenso in (2.) $z^{\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z}) = y$ und $-\nu + 1 = a$, so ergibt sich die nämliche Differentialgleichung (3.) nebst ihrem particulären Integral:

$$y = z^{-\frac{a-1}{2}} \overset{1-a}{J}(\sqrt{z}) \,.$$

Wir erhalten daher das vollständige Integral der obigen Differentialgleichung in folgender Gestalt

$$(4.) \qquad y = z^{-\frac{a-1}{2}} \left(A \overset{a-1}{J}(\sqrt{z}) + B \overset{1-a}{J}(\sqrt{z}) \right)$$

so lange a gebrochen ist. Ist dagegen a Null oder positiv oder negativ ganz, so reducirt sich aus bekannten Gründen vorstehende Lösung auf eine blos particuläre. Alsdann tritt aber, wie bei der Bessel'schen Gleichung, die Function Y^m in die Bresche und liefert das zweite particuläre Integral

$$y = z^{-\frac{a-1}{2}} \overset{a-1}{Y}(\sqrt{z}) \,,$$

indem ja, bei ganzem ν, die Gleichungen (1.) und (2.) für die Function Y^m ebenso gut gelten als für J^m, weil sie nur aus solchen Prämissen hergeleitet wurden, die für beide Arten Bessel'scher Functionen in gleicher Weise stattfinden.

Ist daher in der Differentialgleichung (3.) a eine ganze Zahl oder Null, so genügt ihr als vollständiges Integral

$$(5.) \qquad y = z^{-\frac{a-1}{2}} \left(A \overset{a-1}{J}(\sqrt{z}) + B \overset{a-1}{Y}(\sqrt{z}) \right).$$

Vertauscht man in Gleichung (3.) z mit $-z$, so wird sie zu

$$(6.) \qquad z \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + a \frac{\partial y}{\partial z} - \tfrac{1}{4} y = 0 \,.$$

und ihre Integrale lauten, wenn a gebrochen:

$$(7.) \qquad y = z^{-\frac{a-1}{2}} \left(A \overset{a-1}{J}(i\sqrt{z}) + B \overset{1-a}{J}(i\sqrt{z}) \right),$$

dagegen, wenn a ganz oder Null ist:

$$(8.) \qquad y = z^{-\frac{a-1}{2}} \left(A \overset{a-1}{J}(i\sqrt{z}) + B \overset{a-1}{Y}(i\sqrt{z}) \right).$$

Die im gegenwärtigen Paragraphen behandelte Differentialgleichung bietet darum ein ganz besonderes Interesse dar, weil sich die Lösungen verschiedener Probleme aus der Mechanik und aus der theoretischen Physik auf sie zurückführen lassen. Man gelangt zu derselben bei Bestimmung der Wellenbewegung des Wassers in einem cylindrischen Gefäss von sehr grossem Radius. Denkt man sich ferner einen Rotationskörper längs seiner Rotationsaxe erwärmt, während seine Oberfläche auf einer constanten Temperatur erhalten wird, so gibt die nämliche Gleichung die Vertheilung der

Temperatur in jedem Punkte dieses Körpers. Bei der Bestimmung des durch eine unendlich weit entfernte magnetische Masse in einem weichen Eisencylinder inducirten Magnetismus wird man ebenfalls zu dieser Differentialgleichung geführt*).

Die hier gegebenen Integrale, ebenso einfach als umfassend, lassen, wie ich glaube, nach keiner Richtung hin etwas zu wünschen übrig.

§. 31. Die Riccati'sche Gleichung.

Wir machen jetzt Gebrauch von den Resultaten des §. 27., indem wir in Gleichung (10.) daselbst

$$\sqrt{z}\, J^{\nu}\left(z^{-\frac{1}{2\nu}}\right) = y$$

setzen. Sie wird dann zunächst

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{z^{-\frac{2\nu+1}{\nu}}}{(2\nu)^2} \cdot y = 0$$

oder, wenn man $z = px$ einführt:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{p^{-\frac{1}{\nu}}}{(2\nu)^2} \cdot x^{-\frac{2\nu+1}{\nu}} \cdot y = 0 .$$

Macht man jetzt

$$\frac{p^{-\frac{1}{\nu}}}{(2\nu)^2} = 1, \qquad \text{d. h.} \qquad p = (2\nu)^{-2\nu},$$

so wird sie

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^{-\frac{2\nu+1}{\nu}} \cdot y = 0$$

und ihr genügt

$$y = (2\nu)^{-\nu} \sqrt{x} \,.\, J^{\nu}\left(2\nu x^{-\frac{1}{2\nu}}\right).$$

Setzt man jetzt noch

$$-\frac{2\nu+1}{\nu} = k, \qquad \text{folglich} \qquad \nu = -\frac{1}{k+2}$$

und bedenkt, dass

$$J^{\nu}_{(-z)} = (-1)^{\nu} \,.\, J^{\nu}_{(z)}$$

ist, so ergibt sich

$$y = \left(\frac{2}{k+2}\right)^{\frac{1}{k+2}} . \sqrt{x} \,.\, J^{-\frac{1}{k+2}}\left(\frac{2}{k+2}\, x^{\frac{k+2}{2}}\right)$$

---

*) Kirchhoff, Crelle's Journ. Bd. 48.

und darum auch

(2.) $$y = \sqrt{x}\,.\,J^{\frac{1}{k+2}}\left(\frac{2}{k+2}x^{\frac{k+2}{2}}\right)$$

als particuläres Integral der Gleichung

(1.) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^k y = 0,$$

welche keine andere, als die bekannte Riccati'sche ist.

Verfährt man ebenso mit der Gleichung (11. §. 27.), so wird sie, indem man

$$\sqrt{z}\,.\,J^{\nu}\left(z^{\frac{1}{2\nu}}\right) = y$$

setzt, zunächst:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{z^{\frac{1-2\nu}{\nu}}}{(2\nu)^2}\cdot y = 0.$$

Macht man nun wieder $z = px$, sodann $\frac{p^{\frac{1}{\nu}}}{(2\nu)^2} = 1$, also $p = (2\nu)^{2\nu}$, und endlich $\frac{1-2\nu}{\nu} = k$, woraus $\nu = \frac{1}{k+2}$ folgt, so hat man

$$y = \left(\frac{2}{k+2}\right)^{\frac{1}{k+2}}\sqrt{x}\,.\,J^{\frac{1}{k+2}}\left(\frac{2}{k+2}x^{\frac{k+2}{2}}\right)$$

und deshalb auch

(3.) $$y = \sqrt{x}\,.\,J^{\frac{1}{k+2}}\left(\frac{2}{k+2}\cdot x^{\frac{k+2}{2}}\right)$$

als zweites particuläres Integral der Gleichung (1.).

Das vollständige Integral der Riccati'schen Differentialgleichung

(1.) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^k y = 0$$

lautet demnach

(4.) $$y = \sqrt{x}\left(A J_{(\xi)}^{\frac{1}{k+2}} + B J_{(\xi)}^{-\frac{1}{k+2}}\right),$$

worin

$$\xi = \frac{2}{k+2}x^{\frac{k+2}{2}}$$

zu nehmen ist, mit der Bedingung jedoch, dass $\frac{1}{k+2}$ eine gebrochene Zahl sei.

Ist nämlich $\frac{1}{k+2}$ eine ganze Zahl, so fallen vermöge der Gleichung

$$J_{(z)}^{-n} = (-1)^n J_{(z)}^n$$

die beiden particulären Integrale (2.) und (3.) in ein einziges zusammen; da aber bei ganzzahligem ν die Gleichungen (10.) und (11.) des §. 27. auch für die Bessel'sche Function zweiter Art stattfinden, so hat man in gegenwärtigem Falle

$$(5.)\qquad y = \sqrt{x}\ .\ Y^{\frac{1}{k+2}}\left(\frac{2}{k+2}\cdot x^{\frac{k+2}{2}}\right)$$

als zweites particuläres Integral der Gleichung (1.).

Ist demnach $\frac{1}{k+2}$ positiv oder negativ ganz, so genügt

$$(6.)\qquad y = \sqrt{x}\left(A\, J^{\frac{1}{k+2}}_{(\xi)} + B\, Y^{\frac{1}{k+2}}_{(\xi)}\right),$$

worin

$$\xi = \frac{2}{k+2}\cdot x^{\frac{k+2}{2}}$$

ist, als vollständiges Integral der Riccati'schen Gleichung

$$(1.)\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^k y = 0\,.$$

Die Integrale (4.) und (6.) umfassen alle möglichen Fälle, mit Ausnahme eines einzigen, nämlich wenn $k = -2$ ist. Alsdann aber lässt sich die Gleichung

$$(7.)\qquad x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = 0,$$

in welche die Riccati'sche jetzt übergeht, leicht mit Hilfe der Gleichung (4. §. 28.), d. i.

$$\frac{\partial^2(\sqrt{z}\cos(a+b\log z))}{\partial z^2} = -\frac{1+4b^2}{4z^2}\sqrt{z}\ .\ \cos(a+b\log z)\,.$$

integriren.

Setzt man nämlich hierin

$$y = \sqrt{z}\ .\ \cos(a+b\log z)\,,$$

so wird sie zu

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1+4b^2}{4z^2}\,y = 0\,,$$

worin man nur b aus der Gleichung

$$\frac{1+4b^2}{4} = 1$$

zu bestimmen braucht, um sie in die Form (7.) überzuführen. Daraus ergibt sich aber

$$b = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

und es ist demnach, wenn man x statt z schreibt

$$y = \sqrt{x} \,.\, \cos\left(a + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \log x\right)$$

ein particuläres Integral der Gleichung (7.). Die Grösse a ist darin vollkommen willkührlich; setzen wir dieselbe zuerst $= 0$, dann $= \frac{1}{2}\pi$, so erhalten wir daraus folgende zwei speciellere particuläre Integrale

$$y = \sqrt{x} \,.\, \cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \,.\, \log x\right)$$

und

$$y = \sqrt{x} \,.\, \sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \log x\right),$$

welche übrigens zusammen, wie man unmittelbar einsieht, die obige anscheinend allgemeinere particuläre Lösung vollkommen ersetzen.

Wir haben demnach als vollständiges Integral der Gleichung

$$(7.) \qquad x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = 0$$

den Ausdruck

$$(8.) \qquad y = \sqrt{x}\left(A \cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \log x\right) + B \sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \log x\right)\right).$$

Was nun ferner die Gleichung

$$(1.\mathrm{a.}) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - x^k y = 0$$

anlangt, so lässt sich dieselbe ganz ebenso wie (1.) aus den Gleichungen (10.) und (11.) des §. 27. herleiten, mit dem einzigen Unterschiede, dass man bei Gleichung (10.) $\frac{p^{-\frac{1}{\nu}}}{(2\nu)^2} = -1$, also $p = (-1)^\nu (2\nu)^{-2\nu}$, bei Gleichung (11.) dagegen $\frac{p^{\frac{1}{\nu}}}{(2\nu)^2} = -1$, d. h. $p = (-1)^\nu (2\nu)^{2\nu}$, zu setzen hat. Für die Gleichung (1.a.) gelten alsdann die nämlichen Integrale (4.) und (6.) und unter den nämlichen Bedingungen, nur muss jetzt $\xi = \frac{2i}{k+2} x^{\frac{k+2}{2}}$ genommen werden. Wir können daher aussprechen:

Das vollständige Integral der Riccati'schen Gleichung

$$(1.\mathrm{a.}) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - x^k y = 0$$

lautet entweder

$$(4.\mathrm{a.}) \qquad y = \sqrt{x}\left(A\, J_{(\xi)}^{\frac{1}{k+2}} + B\, J_{(\xi)}^{-\frac{1}{k+2}}\right)$$

oder

(6.a.) $$y = \sqrt{x}\left(A\, J_{(\xi)}^{\frac{1}{k+2}} + B\, Y_{(\xi)}^{\frac{1}{k+2}}\right),$$

je nachdem $\frac{1}{k+2}$ eine gebrochene oder eine ganze Zahl ist; dabei ist

$$\xi = \frac{2i}{k+2} \cdot x^{\frac{k+2}{2}}$$

zu nehmen.

Hat man es mit dem Ausnahmsfall $k = -2$, d. h. mit der Gleichung

(7.a.) $$x^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - y = 0$$

zu thun, so braucht man nur in der Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1+4b^2}{4x^2}\, y = 0$$

$\frac{1+4b^2}{4} = -1$, d. h. $b = \pm \frac{1}{2} i \sqrt{5}$ zu setzen, um sie auf die Form (7.a.) zu bringen Man hat dann sogleich als particuläres Integral der letzteren

$$y = \sqrt{x} \cos\left(a \pm \tfrac{1}{2} i \sqrt{5} \,.\, \log x\right)$$

oder diesem äquivalent, für $a = 0$ und $a = \frac{\pi}{2}$, die zwei particulären Integrale

$$y = \sqrt{x} \,.\, \cos\left(\tfrac{1}{2} i \sqrt{5} \,.\, \log x\right)$$

und

$$y = \sqrt{x} \,.\, \sin\left(\tfrac{1}{2} i \sqrt{5} \,.\, \log x\right).$$

Nun ist aber

$$\cos\left(\tfrac{1}{2} i \sqrt{5} \log x\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{5}\log x} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{5}\log x}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{2}\sqrt{5}} + x^{\;\frac{1}{2}\sqrt{5}}\right)$$

und ebenso

$$\sin\left(\tfrac{1}{2} i \sqrt{5} \log x\right) = -\frac{1}{2i}\left(x^{\frac{1}{2}\sqrt{5}} - x^{-\frac{1}{2}\sqrt{5}}\right).$$

Das vollständige Integral der Gleichung (7.a.) lautet demnach, wenn A und B willkührliche Constante sind

(8.a.) $$y = A\, x^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})} + B\, x^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})}.$$

Die Gleichung

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \pm y = 0$$

lässt sich übrigens auch leicht direct integriren. Setzt man nämlich

$$y = x^m,$$

so verwandelt sich jene Gleichung in

$$m(m-1) \pm 1 = 0,$$

welche nach m aufgelöst für das obere Zeichen

$$m = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} i\sqrt{3},$$

für das untere dagegen

$$m = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

liefert. Für den ersten Fall sind daher in der Formel

$$y = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}} = \sqrt{x}\left(\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\log x) \pm i\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\log x)\right)$$

und für den zweiten Fall in der Formel

$$y = x^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}$$

zwei particuläre Integrale enthalten. Man gelangt also auf diesem völlig verschiedenen Wege zu den nämlichen bereits oben gegebenen Integralen. Wir glaubten jedoch der obigen Integrationsweise, weil sie mit der im allgemeinen Falle durchgeführten in organischem Zusammenhange steht, hier den Vorzug geben zu müssen.

Durch die gegenwärtigen Entwickelungen ist, wie ich glaube, die Integration der so viel behandelten Riccati'schen Differentialgleichung ein für allemal und zwar auf die befriedigendste Weise erledigt. Nur möge noch gestattet sein, den Gebrauch unserer Formeln an einigen einfachen Beispielen zu erläutern.

Handelt es sich z. B. um die Integration der Gleichung

$$\text{(9.)} \qquad \sqrt{x} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \pm y = 0,$$

so haben wir $k = -\frac{1}{2}$, und das vollständige Integral lautet zunächst

$$y = \sqrt{x}\left(A\, J_{(\xi)}^{\frac{2}{3}} + B\, J_{(\xi)}^{-\frac{2}{3}}\right).$$

Nach Gleichung (V. §. 4.) ist aber, wenn man daselbst $m = 1$ und $\nu = -\frac{2}{3}$ setzt:

$$J_{(\xi)}^{-\frac{2}{3}} = -J_{(\xi)}^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{J_{(\xi)}^{\frac{1}{3}}}{\xi}.$$

Wir haben demnach als vollständiges Integral der obigen Gleichung den Ausdruck

$$\text{(10.)} \qquad y = \sqrt{x}\left(A\, J_{(\xi)}^{\frac{2}{3}} + B\left[J_{(\xi)}^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{J_{(\xi)}^{\frac{1}{3}}}{\xi}\right]\right),$$

worin $\xi = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}}$ oder $\xi = i \cdot \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}}$ zu setzen ist, je nachdem

in der gegebenen Differentialgleichung das obere oder das untere Zeichen gilt.

Sei ferner $k = 1$, also die Gleichung

$$(11.)\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \pm x y = 0$$

zu integriren. Man erhält sofort die Lösung

$$y = \sqrt{x}\left(A J^{\frac{1}{3}}_{(\xi)} - B J^{-\frac{1}{3}}_{(\xi)}\right),$$

während aus (V.)

$$J^{-\frac{1}{3}}_{(\xi)} = - J^{\frac{5}{3}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{J^{\frac{2}{3}}}{\xi}$$

resultirt. Die verlangte vollständige Lösung ist also

$$(12.)\qquad y = \sqrt{x}\left(A J^{\frac{1}{3}}_{(\xi)} + B\left[J^{\frac{5}{3}}_{(\xi)} - \frac{4}{3} \cdot \frac{J^{\frac{2}{3}}}{\xi}\right]\right),$$

wobei entweder $\xi = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ oder $\xi = i\,\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ zu nehmen ist, je nachdem in (11.) das obere oder das untere Zeichen eintritt.

Nehmen wir $k = -\frac{8}{5}$, so finden wir als vollständiges Integral der Gleichung

$$(13.)\qquad x^{\frac{8}{5}} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = 0$$

zunächst

$$y = \sqrt{x}\left(A J^{\frac{5}{2}}_{(\xi)} + B J^{-\frac{5}{2}}_{(\xi)}\right).$$

Wir erhalten sodann aus (V.) für $m = 3$ und $\nu = -\frac{5}{2}$

$$J^{-\frac{5}{2}}_{(\xi)} = - J^{\frac{7}{2}}_{(\xi)} + \frac{3}{\xi} J^{\frac{5}{2}}_{(\xi)} + \frac{3}{\xi^2} J^{\frac{3}{2}}_{(\xi)} + \frac{3}{\xi^3} J^{\frac{1}{2}}_{(\xi)},$$

während nach den Formeln des §. 16.

$$J^{\frac{1}{2}}_{(\xi)} = \sqrt{\frac{2}{\pi \xi}} \cdot \sin \xi$$

$$J^{\frac{3}{2}}_{(\xi)} = \sqrt{\frac{2}{\pi \xi}} \left(\frac{\sin \xi}{\xi} - \cos \xi\right)$$

$$J^{\frac{5}{2}}_{(\xi)} = \sqrt{\frac{2}{\pi \xi}} \left(\left[\frac{3}{\xi^2} - 1\right] \sin \xi - \frac{3}{\xi} \cos \xi\right)$$

$$J^{\frac{7}{2}}_{(\xi)} = \sqrt{\frac{2}{\pi \xi}} \left(\left[\frac{15}{\xi^3} - \frac{6}{\xi}\right] \sin \xi - \left[\frac{15}{\xi^2} - 1\right] \cos \xi\right)$$

ist. Setzt man diese Werthe oben ein, so ergibt sich nach einigen einfachen Reductionen

$$J^{-\frac{5}{2}}_{(\xi)} = \sqrt{\frac{2}{\pi \xi}} \left(\left[\frac{3}{\xi^2} - 1\right] \cos \xi + \frac{3}{\xi} \sin \xi\right)$$

und man hat, wenn man noch $\xi = 5\,x^{\frac{1}{5}}$ wirklich einsetzt, das folgende vollständige Integral der Gleichung (13.):

$$(14.)\qquad y = x^{\frac{2}{5}}\Big\{A\Big(\Big[\frac{3}{25x^{\frac{2}{5}}} - 1\Big]\sin 5\,x^{\frac{1}{5}} - \frac{3}{5x^{\frac{1}{5}}}\cos 5\,x^{\frac{1}{5}}\Big) + B\Big(\Big[\frac{3}{25x^{\frac{2}{5}}} - 1\Big]\cos 5\,x^{\frac{1}{5}} + \frac{3}{5x^{\frac{1}{5}}}\sin 5\,x^{\frac{1}{5}}\Big)\Big\}.$$

Das Integral der Gleichung

$$(15.)\qquad x^{\frac{8}{5}}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - y = 0$$

findet man ganz in derselben Weise, wenn man nur zuletzt $\xi = 5\,i\,x^{\frac{1}{5}}$ setzt. Durch wenige naheliegende Umformungen nimmt es die Gestalt

$$(16.)\qquad y = x^{\frac{2}{5}}\Big\{A\Big(\frac{3}{25x^{\frac{2}{5}}} - \frac{3}{5\,x^{\frac{1}{5}}} + 1\Big)\,c^{5\,x^{\frac{1}{5}}} + B\Big(\frac{3}{25x^{\frac{2}{5}}} + \frac{3}{5\,x^{\frac{1}{5}}} + 1\Big)\,e^{-5\,x^{\frac{1}{5}}}\Big\}$$

an.

Ist $\frac{1}{k+2}$ positiv ganz $= n$, folglich $k = -\frac{2n-1}{n}$, so genügt der Gleichung

$$(17.)\qquad x^{\frac{2n-1}{n}}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \pm y = 0$$

das vollständige Integral

$$(18.)\qquad y = \sqrt{x}\,\big(A\,J^{n}_{(\xi)} + B\,Y^{n}_{(\xi)}\big).$$

Darin muss, wenn das obere Zeichen gilt, $\xi = 2\,n\,x^{\frac{1}{2n}}$, für das untere dagegen $\xi = 2\,n\,i\,x^{\frac{1}{2n}}$ gesetzt werden.

Ist endlich $\frac{1}{k+2}$ negativ ganz $= -n$, d. i $k = -\frac{2n+1}{n}$, so entspricht der Gleichung

$$(19.)\qquad x^{\frac{2n+1}{n}}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \pm y = 0$$

die vollständige Auflösung

$$(20.)\qquad y = \sqrt{x}\,\big(A\,J^{n}_{(\xi)} + B\,Y^{n}_{(\xi)}\big),$$

welche sich von der vorhergehenden nur dadurch unterscheidet, dass in ihr entweder $\xi = 2\,n\,x^{-\frac{1}{2n}}$ oder $\xi = 2\,n\,i\,x^{-\frac{1}{2n}}$ zu setzen ist, je nachdem in Gleichung (19.) das obere oder das untere Zeichen gilt.

§. 32. Die Gleichungen $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + e^{2z}\, y = 0$ und

$$z^4 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + e^{\frac{2}{z}}\, y = 0 .$$

Es leuchtet unmittelbar ein, wie aus den Gleichungen 8. §. 27. und (3. und 7. §. 28.) noch weitere lineare Differentialgleichungen von allgemeinerer Form nebst ihren Integralen hergeleitet werden könnten, von denen z. B. die Riccati'sche Gleichung nur ein specieller Fall wäre. Wir wollen uns jedoch darauf beschränken, nur noch zwei lineare Gleichungen von einfachem Bau hier anzuführen, welche aus den Formeln (8. und 9. §. 28.) hervorgehen.

Setzt man nämlich in der dortigen Formel (8.)

$$y = J^0(a^z),$$

so ist dieser Werth ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + (\log a)^2 \,.\, a^{2z}\, y = 0 .$$

Derselben Gleichung genügt aber auch

$$y = Y^0(a^z),$$

weil ja die Gleichung (8.) (ebenso wie (9.)) auch für die Bessel'sche Function zweiter Art richtig bleibt. Setzen wir daher der Einfachheit wegen $a = e$, unter e die Basis der natürlichen Logarithmen verstanden, so entspricht der Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + e^{2z}\, y = 0 \tag{1.}$$

das vollständige Integral

$$y = A\, J^0(e^z) + B\, Y^0(e^z) . \tag{2.}$$

Verfahren wir in analoger Weise mit der Formel (9. §. 28.), so erhalten wir für die Differentialgleichung

$$z^4 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + e^{\frac{2}{z}}\, y = 0 \tag{3.}$$

die vollständige Auflösung

$$y = z\left(A\, J^0\left(e^{\frac{1}{z}}\right) + B\, Y^0\left(e^{\frac{1}{z}}\right)\right) . \tag{4.}$$

§. 33. Die Gleichung $x^m \cdot \frac{\partial^{2m} y}{\partial x^{2m}} \mp y = 0$.

Wir haben in §. 4. die Gleichung

$$\frac{\partial^{2m}\left(z^{\frac{m}{2}}\, J^m_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (-1)^m \cdot \frac{z^{-\frac{m}{2}}}{2^{2m}}\, J^m_{(\sqrt{z})} \tag{1.}$$

gefunden, welche auch in folgender Form geschrieben werden kann:

$$(-4z)^m \cdot \frac{\partial^{2m}\left(z^{\frac{m}{2}} \overset{m}{J}(\sqrt{z})\right)}{\partial z^{2m}} - z^{\frac{m}{2}} \overset{m}{J}(\sqrt{z}) = 0 .$$

Setzen wir darin

$$z^{\frac{m}{2}} \overset{m}{J}(\sqrt{z}) = y ,$$

so lautet sie auch:

$$(-4z)^m \cdot \frac{\partial^{2m} y}{\partial z^{2m}} - y = 0$$

und wandelt sich durch die Substitution $-4z = px$ zunächst in folgende um:

$$\left(\frac{16}{p}\right)^m x^m \cdot \frac{\partial^{2m} y}{\partial x^{2m}} - y = 0 . \tag{2.}$$

Machen wir nun

$$\left(\frac{16}{p}\right)^m = 1 ,$$

d. h.

$$p = 16 \cdot \sqrt[m]{1} ,$$

so erkennen wir, dass

$$y = z^{\frac{m}{2}} \overset{m}{J}(\sqrt{z})$$

ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$x^m \cdot \frac{\partial^{2m} y}{\partial x^{2m}} - y = 0 \tag{3.}$$

ist, sofern nur $z = -\frac{1}{4} p x$ genommen und p aus der Gleichung

$$p = 16 \sqrt[m]{1}$$

bestimmt wird. Diese Gleichung liefert aber für p m verschiedene Werthe. Bezeichnen wir irgend einen der m Werthe der $\sqrt[m]{1}$ mit α, so liefert demnach die Formel

$$y = x^{\frac{m}{2}} J^m(2i\sqrt{\alpha x})$$

m verschiedene particuläre Integrale der Differentialgleichung (3.), falls statt α nach und nach die m verschiedenen Werthe von $\sqrt[m]{1}$ eingesetzt werden.

Die Gleichung (1.) gilt aber nicht bloss für die Bessel'sche Function erster Art, sondern ebensogut für die Bessel'sche Function zweiter Art; demnach muss auch

$$y = x^{\frac{m}{2}} Y^m(2i\sqrt{\alpha x})$$

ein Ausdruck sein, der unter denselben Bedingungen wie oben m particuläre Integrale der Gleichung (3.) liefert.

Das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$x^m \frac{\partial^{2m} y}{\partial x^{2m}} - y = 0 \tag{3.}$$

ist daher

$$y = x^{\frac{m}{2}} \sum_{p=0}^{p=m-1} \left(A_p J^m (2i\sqrt{\alpha_p x}) + B_p Y^m (2i\sqrt{\alpha_p x}) \right), \tag{4.}$$

wenn unter $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ die m Wurzelwerthe der Gleichung $\alpha^m = 1$, und unter $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, B_0, B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}$ $2m$ willkührliche Constante verstanden werden.

Machen wir jetzt in Gleichung (2.)

$$\left(\frac{16}{p}\right)^m = -1$$

oder

$$p = 16 \sqrt[m]{-1},$$

so geht dieselbe über in

$$x^m \frac{\partial^{2m} y}{\partial x^{2m}} + y = 0, \tag{5.}$$

welcher aus denselben Gründen wie oben die particulären Integrale

$$y = x^{\frac{m}{2}} J^m (2i\sqrt{\beta x})$$

und

$$y = x^{\frac{m}{2}} Y^m (2i\sqrt{\beta x})$$

genügen, sofern man unter β irgend einen der m verschiedenen Werthe der $\sqrt[m]{-1}$ versteht.

Demnach genügt der Differentialgleichung

$$x^m \frac{\partial^{2m} y}{\partial x^{2m}} + y = 0 \tag{5.}$$

als vollständige Lösung der Ausdruck

$$y = x^{\frac{m}{2}} \sum_{p=0}^{p=m-1} \left(A_p J^m (2i\sqrt{\beta_p x}) + B_p Y^m (2i\sqrt{\beta_p x}) \right), \tag{6.}$$

falls $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$ die m Wurzelwerthe der Gleichung $\beta^m = -1$ und $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, B_0, B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}$ $2m$ willkührliche Constante vorstellen.



Anhang.

Tafeln für die Function $J^m_{(z)}$.

Bessel hat seiner bereits citirten Abhandlung „über die planetarischen Störungen" eine Tafel der Functionen $J^0_{(z)}$ und $J^1_{(z)}$ beigefügt, welche für alle um 0,01 verschiedenen Werthe des Arguments die zugehörigen Functionswerthe zehnstellig angibt, und zwar von $z = 0$ bis $z = 3{,}20$. Hansen hat neue Tafeln von grösserem Umfange berechnet; dieselben gehen von $z = 0$ bis $z = 20$*), mit einem Incremente $= 0{,}1$ und geben die Functionswerthe bis auf 6 Decimalstellen, von denen die letzte bis auf eine Einheit verbürgt wird. Es dürfte dem Leser erwünscht sein, diese Tafeln, welche auch der schon mehrfach angeführten Abhandlung von Schlömilch beigegeben sind, hier abgedruckt zu finden.

Die Tafel I., welche die Werthe der Functionen J^0 und J^1 enthält, ward in folgender Weise berechnet. Für die erste Hälfte der Tafel wurden die nach steigenden, für die zweite Hälfte die nach fallenden Potenzen fortschreitenden Reihen (§. 6. und §. 17.)

---

*) Hier muss bemerkt werden, dass Hansen für die Bessel'sche Function eine von der hier adoptirten abweichende Schreibweise gebraucht. Bezeichnen wir die Hansen'sche Form mit dem Buchstaben I, so besteht zwischen ihr und der unsrigen die Relation

$$I^\nu_{(z)} = J^\nu_{(2z)} \quad \text{und umgekehrt} \quad J^\nu_{(z)} = I^\nu_{(\frac{1}{2}z)}.$$

In den Hansen'schen Tafeln geht daher das Argument eigentlich von 0 bis 10, und das Increment beträgt 0,05. Die folgenden Tafeln ergaben sich daher aus den Hansen'schen durch blosse Verdoppelung des Arguments.

Auch Schlömilch bedient sich in seiner Abhandlung der Hansen'schen Bezeichnung. Uns schien es angemessener, die ursprünglich Bessel'sche Form beizubehalten.

benutzt. Jedoch wurden auf diesem Wege (mit Ausnahme des letzten Theiles der Tafel) nur diejenigen Functionswerthe gefunden, für welche z eine gerade Zahl ist. Aus diesen ergaben sich mit Hilfe des Taylor'schen Lehrsatzes die zwischenliegenden. Erhält nämlich das Argument z den Zuwachs h, so ist

$$J^m_{(z+h)} = J^m_{(z)} + \frac{\partial J^m_{(z)}}{\partial z} \cdot \frac{h}{1} + \frac{\partial^2 J^m_{(z)}}{\partial z^2} \cdot \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^3 J^m_{(z)}}{\partial z^3} \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$$

Vermöge der Formel (6. §. 3.) ist aber

$$\frac{\partial J^m_{(z)}}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(J^{m-1}_{(z)} - J^{m+1}_{(z)}\right)$$

$$\frac{\partial^2 J^m_{(z)}}{\partial z^2} = \frac{1}{4}\left(J^{m-2}_{(z)} - 2\, J^m_{(z)} + J^{m+2}_{(z)}\right)$$

$$\frac{\partial^3 J^m_{(z)}}{\partial z^3} = \frac{1}{8}\left(J^{m-3}_{(z)} - 3\, J^{m-1}_{(z)} + 3\, J^{m+1}_{(z)} - J^{m+3}_{(z)}\right)$$

. . . .

Man erkennt aus diesen Gleichungen, dass diese Differentialquotienten dem nämlichen Bildungsgesetz gehorchen, wie die nach m genommenen endlichen Differenzen zwischen je der zweiten Function, mit dem einzigen Unterschied, dass jede dieser Differenzen noch mit der sovielten Potenz von 2 dividirt erscheint, als die jedesmalige Ordnung des Differentialquotienten angibt. Mit Rücksicht auf die Gleichung

$$J^{-m}_{(z)} = (-1)^m J^m_{(z)}$$

erhält man nun z. B. für $z = 8$ folgende kleine Tabelle, in welcher die successiven Differenzen mit Δ_1, Δ_2, Δ_3, ... bezeichnet sind:

m	$J^m_{(8)}$	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6
—6	+0,3375760						
		—0,4429335					
—4	—0,1053575		+0,4352993				
		—0,0076342		—0,1430226			
—2	—0,1129917		+0,2922767		—0,718539		
		+0,2846425		—0,8615617		+2,441662	
0	+0,1716508		—0,5692850		+1,723123		—4,883324
		—0,2846425		+0,8615617		—2,441662	
2	—0,1129917		+0,2922767		—0,718539		
		+0,0076342		+0,1430226			
4	—0,1053575		+0,4352993				
		+0,4429335					
6	+0,3375760						

Bedenkt man nun, dass für die ungeraden Differenzenordnungen die Vorzeichen umgekehrt werden müssen, so erhält man sogleich:

$$\left(\frac{\partial J^1_{(z)}}{\partial z}\right)_8 = +\ 0{,}1423213 \qquad \left(\frac{\partial^2 J^0_{(z)}}{\partial z^2}\right)_8 = -\ 0{,}1423213$$

$$\left(\frac{\partial^3 J^1_{(z)}}{\partial z^3}\right)_8 = -\ 0{,}1076952 \qquad \left(\frac{\partial^4 J^0_{(z)}}{\partial z^4}\right)_8 = +\ 0{,}1076952$$

$$\left(\frac{\partial^5 J^1_{(z)}}{\partial z^5}\right)_8 = +\ 0{,}763019 \qquad \left(\frac{\partial^6 J^0_{(z)}}{\partial z^6}\right)_8 = -\ 0{,}763019$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

Ebenso ergibt sich

m	$J^m_{(z)}$	$\varDelta_1$	$\varDelta_2$	$\varDelta_3$	$\varDelta_4$	$\varDelta_5$
— 5	— 0,1857748					
		+ 0,4769071				
— 4	+ 0,2911323		— 1,0026757			
		— 0,5257686		+ 1,997717		
— 1	— 0,2346363		+ 0,9950412		— 3,987799	
		+ 0,4692726		— 1,990082		+ 7,975598
1	+ 0,2346363		— 0,9950412		+ 3,987799	
		— 0,5257686		+ 1,997717		
3	— 0,2911323		+ 1,0026757			
		+ 0,4769071				
5	+ 0,1857748					

Daraus folgt nun

$$\left(\frac{\partial J^0_{(z)}}{\partial z}\right)_8 = -\ 0{,}2346363 \qquad \left(\frac{\partial^2 J^1_{(z)}}{\partial z^2}\right)_8 = -\ 0{,}2487603$$

$$\left(\frac{\partial^3 J^0_{(z)}}{\partial z^3}\right)_8 = +\ 0{,}2487603 \qquad \left(\frac{\partial^4 J^1_{(z)}}{\partial z^4}\right)_8 = +\ 0{,}249237$$

$$\left(\frac{\partial^5 J^0_{(z)}}{\partial z^5}\right)_8 = -\ 0{,}249237 \qquad\qquad \vdots$$

$$\vdots$$

Hat man nun auf diesem Wege eine Tafel der Functionen J^0 und J^1 construirt, so kann man vermittelst der Gleichungen (II.), nämlich

$$J^2_{(z)} = \frac{2}{z}\, J^1_{(z)} - J^0_{(z)}$$

$$J^3_{(z)} = \frac{4}{z}\, J^2_{(z)} - J^1_{(z)}$$

$$J^4_{(z)} = \frac{6}{z}\, J^3_{(z)} - J^2_{(z)}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$J^m_{(z)} = \frac{2\,(m-1)}{z}\, J^{m-1}_{(z)} - J^{m-2}_{(z)},$$

alle folgenden Transcendenten der Reihe nach daraus bestimmen, oder man kann sich auch, um $J^m_{(z)}$ direct zu finden, der Gleichung (2. §. 1.) bedienen. In dem einen oder andern Falle nimmt aber die Genauigkeit ab, sobald $2(m-1)$ grösser als z geworden ist,

und der Fehler, mit welchem die letzte Decimalstelle behaftet ist, vergrössert sich so, dass zuletzt alle merklichen Ziffern unrichtig werden. Um diesem Uebelstande zu begegnen, ist die Tafel II. hinzugefügt worden, welche die Bessel'schen Functionen für grössere Indices enthält.

Beide Tafeln enthalten noch in drei Columnen unter den Ueberschriften a, b, c die Werthe der Ausdrücke

$$\frac{\partial \overset{m}{J}_{(z)}}{\partial z}\,, \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 \overset{m}{J}_{(z)}}{\partial z^2}\,, \quad \frac{1}{6}\cdot\frac{\partial^3 \overset{m}{J}_{(z)}}{\partial z^3}\,,$$

reducirt auf das Increment der Tafel, welches in Tafel I. 0,1, in Tafel II. dagegen 0,2 ist. Hat man nun den Werth von $\overset{m}{J}$ für ein nicht in der Tafel vorkommendes Argument ζ zu bestimmen, und ist z das nächste vorhandene Argument, so setze man $\zeta - z = \varepsilon$, also $\zeta = z + \varepsilon$; dann ist nach dem Taylor'schen Satze, wenn das Increment der Tafel mit h bezeichnet wird

$$\overset{m}{J}_{(z+\varepsilon)} = \overset{m}{J}_{(z)} + a\cdot\frac{\varepsilon}{h} + b\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^2 + c\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^3$$

oder

$$\overset{m}{J}_{(z+\varepsilon)} = \overset{m}{J}_{(z)} + \left[a + \left(b + c\,\frac{\varepsilon}{h}\right)\frac{\varepsilon}{h}\right]\frac{\varepsilon}{h}\,,$$

was für die Rechnung etwas kürzer ist.



Tafel I.

z	J^0	a	b	c	J^1	a	b	c
0.0	1	0	−2500	0	0	+50000	0	−62
0.1	0.997502	− 4994	2491	+ 6	0.049938	49813	− 187	62
0.2	0.990025	9950	2463	12	0.099501	49252	373	61
0.3	0.977626	14832	2416	18	0.148319	48323	556	60
0.4	0.960398	19603	2352	24	0.196027	47033	733	58
0.5	0.938470	24227	2270	30	0.242268	45393	905	56
0.6	0.912005	28670	2171	36	0.286701	43417	1070	53
0.7	0.881201	32900	2056	41	0.328996	41121	1225	50
0.8	0.846287	36884	1926	46	0.368842	38523	1370	47
0.9	0.807524	40595	1782	50	0.405950	35647	1504	43
1.0	0.765198	44005	1626	54	0.440051	32515	1626	38
1.1	0.719622	47090	1458	58	0.470902	29153	1734	34
1.2	0.671133	49829	1279	61	0.498289	25589	1828	29
1.3	0.620086	52202	1093	63	0.522023	21853	1906	24
1.4	0.566855	54195	899	65	0.541948	17975	1969	18
1.5	0.511828	55794	699	67	0.557937	13987	2016	13
1.6	0.455402	56990	496	68	0.569896	9922	2046	7
1.7	0.397985	57776	291	69	0.577765	5812	2060	− 2
1.8	0.339989	58152	− 85	68	0.581517	+ 1692	2057	+ 4
1.9	0.281819	58116	+ 120	68	0.581157	− 2405	2038	9
2.0	0.223891	57672	322	67	0.576725	6447	2002	14
2.1	0.166607	56829	520	65	0.568292	10401	1950	19
2.2	0.110362	55596	712	63	0.555963	14235	1882	25
2.3	0.055540	53987	896	60	0.539873	17919	1800	30
2.4	+0.002508	52018	1071	57	0.520185	21424	1703	34
2.5	−0.048384	49709	1236	53	0.497094	24722	1593	38
2.6	0.096805	47082	1389	49	0.470818	27789	1471	42
2.7	0.142449	44160	1530	45	0.441601	30601	1339	46
2.8	0.185036	40971	1657	40	0.409709	33136	1196	49
2.9	0.224312	37543	1769	35	0.375427	35377	1044	52
3.0	0.260052	33906	1866	29	0.339059	37307	885	54
3.1	0.292064	30092	1946	24	0.300921	38914	720	56
3.2	0.320188	26134	2009	18	0.261343	40186	551	57
3.3	0.344296	22066	2056	13	0.220663	41116	379	58
3.4	0.364296	17923	2085	7	0.179226	41701	205	58
3.5	0.380128	13738	2097	+ 1	0.137378	41938	− 32	58
3.6	0.391769	9547	2091	− 5	0.095466	41829	+ 141	57
3.7	0.399230	5383	2069	10	0.053834	41378	310	56
3.8	0.402556	− 1282	2030	16	+0.012821	40593	474	54
3.9	0.401826	+ 2724	1974	21	−0.027244	39484	634	52

Tafel I.

z	J^0	a	b	c	J^1	a	b	c
4.0	−0.397150	+ 6604	+1903	−26	−0.066043	−38064	+ 786	+49
4.1	0.388670	10327	1817	31	0.103273	36348	929	46
4.2	0.376557	13865	1718	35	0.138647	34354	1063	43
4.3	0.361011	17190	1605	39	0.171897	32103	1186	38
4.4	0.342257	20277	1481	43	0.202776	29617	1298	34
4.5	0.320543	23106	1346	47	0.231061	26920	1397	31
4.6	0.296138	25655	1202	49	0.256553	24037	1483	26
4.7	0.269331	27908	1050	52	0.279081	20995	1556	22
4.8	0.240425	29850	891	54	0.298500	17824	1613	17
4.9	0.209738	31469	728	55	0.314695	14552	1656	12
5.0	0.177597	32758	560	56	0.327579	11208	1685	7
5.1	0.144335	33710	391	56	0.337097	7824	1697	+ 2
5.2	0.110290	34322	221	56	0.343223	4429	1695	− 3
5.3	0.075803	34596	+ 53	56	0.345961	− 1053	1678	8
5.4	0.041210	34534	− 114	55	0.345345	+ 2274	1646	13
5.5	−0.006844	34144	276	53	0.341438	5524	1601	18
5.6	+0.026971	33433	433	51	0.334333	8667	1541	22
5.7	0.059920	32415	584	49	0.324148	11679	1468	26
5.8	0.091703	31103	727	46	0.311028	14533	1384	30
5.9	0.122033	29514	860	43	0.295143	17206	1288	34
6.0	0.150645	27668	984	39	0.276684	19676	1181	37
6.1	0.177291	25586	1096	35	0.255865	21924	1065	40
6.2	0.201747	23292	1197	31	0.232917	23931	941	42
6.3	0.223812	20809	1284	27	0.208087	25684	810	44
6.4	0.243311	18164	1358	22	0.181638	27169	674	46
6.5	0.260095	15384	1419	18	0.153841	28376	533	47
6.6	0.274043	12498	1465	13	0.124980	29298	388	48
6.7	0.285065	9534	1497	8	0.095342	29929	243	49
6.8	0.293096	6522	1513	− 3	0.065219	30269	+ 96	49
6.9	0.298102	3490	1516	+ 2	0.034902	30316	− 49	48
7.0	0.300079	+ 468	1504	6	−0.004683	30075	192	47
7.1	0.299051	− 2515	1478	11	+0.025153	29551	331	46
7.2	0.295071	5433	1438	15	0.054327	28753	466	44
7.3	0.288217	8257	1384	20	0.082571	27691	595	42
7.4	0.278596	10962	1319	24	0.109625	26378	716	39
7.5	0.266340	13525	1242	28	0.135248	24830	830	36
7.6	0.251602	15921	1153	31	0.159214	23065	934	33
7.7	0.234559	18131	1055	34	0.181313	21101	1028	30
7.8	0.215408	20136	948	37	0.201357	18959	1112	26
7.9	0.194362	21918	833	39	0.219179	16662	1184	22

Tafel I.

z	J^0	a	b	c	J^1	a	b	c
8.0	+0.171651	−23464	− 712	+41	+0.234636	+14232	−1244	−18
8.1	0.147518	24761	585	43	0.247607	11695	1291	14
8.2	0.122216	25800	454	44	0.257998	9075	1326	9
8.3	0.096006	26574	320	45	0.265739	6399	1348	5
8.4	0.069158	27079	185	45	0.270786	3692	1357	− 1
8.5	0.041939	27312	− 49	45	0.273121	+ 981	1352	+ 4
8.6	+0.014623	27275	+ 86	44	0.272754	− 1709	1335	8
8.7	−0.012523	26972	218	43	0.269719	4352	1306	12
8.8	0.039234	26407	346	42	0.264073	6924	1264	16
8.9	0.065253	25590	470	40	0.255902	9401	1211	20
9.0	0.090334	24531	588	38	0.245312	11759	1146	23
9.1	0.114239	23243	699	36	0.232430	13978	1071	26
9.2	0.136748	21741	802	33	0.217408	16038	987	30
9.3	0.157655	20041	896	30	0.200414	17921	894	32
9.4	0.176772	18163	980	26	0.181632	19609	794	34
9.5	0.193929	16127	1055	23	0.161264	21090	686	36
9.6	0.208979	13952	1118	19	0.139525	22351	574	38
9.7	0.221796	11664	1169	15	0.116639	23382	456	39
9.8	0.232276	9284	1209	11	0.092840	24175	336	40
9.9	0.240341	6837	1236	7	0.068370	24725	213	41
10.0	0.245936	4347	1251	+ 3	0.043473	25028	− 90	41
10.1	0.249030	− 1840	1254	− 1	+0.018396	25085	+ 33	41
10.2	0.249617	+ 661	1245	5	−0.006616	24897	155	40
10.3	0.247717	3132	1223	9	0.031318	24468	274	39
10.4	0.243372	5547	1191	13	0.055473	23804	389	37
10.5	0.236648	7885	1146	17	0.078850	22914	500	36
10.6	0.227635	10123	1090	20	0.101229	21808	605	34
10.7	0.216443	12240	1025	23	0.122399	20500	702	31
10.8	0.203202	14210	950	26	0.142166	19004	793	29
10.9	0.188062	16035	867	29	0.160350	17335	875	26
11.0	0.171190	17679	776	32	0.176785	15512	947	23
11.1	0.152768	19133	678	34	0.191328	13553	1010	19
11.2	0.132992	20385	574	35	0.203853	11479	1062	16
11.3	0.112069	21426	466	37	0.214255	9311	1104	12
11.4	0.090215	22245	353	38	0.222450	7070	1135	8
11.5	0.067654	22838	239	38	0.228379	4780	1154	4
11.6	0.044616	23200	123	39	0.232000	2462	1162	+ 1
11.7	−0.021332	23330	+ 7	39	0.233300	− 139	1159	− 3
11.8	+0.001967	23228	− 108	38	0.232285	+ 2165	1144	7
11.9	0.025049	22898	221	37	0.228983	4429	1118	10

Tafel I.

z	J^0	a	b	c	J^1	a	b	c
12.0	+0.047689	+22345	— 332	—36	—0.223447	+ 6631	+1082	—14
12.1	0.069667	21575	437	34	0.215749	8750	1035	17
12.2	0.090770	20598	538	32	0.205982	10765	979	20
12.3	0.110798	19426	633	30	0.194259	12659	913	23
12.4	0.129561	18071	721	28	0.180710	14413	839	26
12.5	0.146884	16548	801	25	0.165484	16012	758	28
12.6	0.162607	14874	872	22	0.148742	17441	670	30
12.7	0.176588	13066	934	19	0.130662	18688	576	32
12.8	0.188701	11143	987	16	0.111432	19741	477	34
12.9	0.198843	9125	1030	12	0.091248	20592	374	35
13.0	0.206926	7032	1062	9	0.070318	21234	268	36
13.1	0.212888	4885	1083	5	0.048853	21662	160	36
13.2	0.216686	2707	1094	— 2	0.027067	21874	+ 52	36
13.3	0.218298	+ 518	1094	+ 2	—0.005177	21869	— 57	36
13.4	0.217725	— 1660	1083	5	+0.016599	21649	163	35
13.5	0.214989	3805	1061	9	0.038049	21217	268	34
13.6	0.210133	5896	1029	12	0.058965	20580	369	33
13.7	0.203221	7914	987	15	0.079143	19744	466	31
13.8	0.194336	9839	936	18	0.098391	18721	557	29
13.9	0.183580	11653	876	21	0.116525	17520	643	27
14.0	0.171073	13338	808	24	0.133375	16155	721	25
14.1	0.156953	14878	732	26	0.148784	14640	792	22
14.2	0.141369	16261	650	28	0.162611	12992	855	19
14.3	0.124488	17473	561	30	0.174729	11227	909	16
14.4	0.106484	18503	468	32	0.185032	9363	953	13
14.5	0.087545	19343	371	33	0.193429	7421	988	10
14.6	0.067864	19985	271	34	0.199853	5418	1013	6
14.7	0.047642	20425	169	34	0.204251	3375	1028	— 3
14.8	0.027082	20659	— 66	34	0.206596	+ 1312	1033	0
14.9	+0.006392	20688	+ 37	34	0.206876	— 749	1027	+ 3
15.0	-0.014224	20510	139	34	0.205104	2790	1012	7
15.1	0.034462	20131	239	33	0.201310	4789	986	10
15.2	0.054421	19555	336	32	0.195545	6729	951	13
15.3	0.073608	18788	429	30	0.187879	8589	907	16
15.4	0.091936	17840	518	28	0.178400	10352	855	19
15.5	0.109231	6721	600	26	0.167213	12002	794	21
15.6	0.125326	15444	676	24	0.154440	13523	726	24
15.7	0.140070	14022	745	22	0.140216	14900	651	26
15.8	0.153326	12469	806	19	0.124691	16122	570	28
15.9	0.164971	10803	859	16	0.108028	17177	484	29

Tafel I.

z	J^0	a	b	c	J^1	a	b	c
16.0	—0.174899	— 9040	+ 903	+13	+0.090397	—18055	— 394	+31
16.1	0.183024	7198	937	10	0.071979	18749	300	32
16.2	0.189275	5296	963	7	0.052962	19254	204	32
16.3	0.193603	3354	978	+ 4	0.033535	19566	107	32
16.4	0.195975	— 1389	984	0	+0.013895	19682	+ 9	33
16.5	0.196381	+ 577	980	— 3	—0.005764	19603	+ 88	32
16.6	0.194828	2525	966	6	0.025247	19331	184	32
16.7	0.191344	4436	943	9	0.044362	18869	278	31
16.8	0.185974	6292	911	12	0.062923	18223	368	29
16.9	0.178783	8075	870	15	0.080749	17401	454	28
17.0	0.169854	9767	821	18	0.097669	16411	535	26
17.1	0.159285	11352	763	20	0.113519	15265	610	24
17.2	0.147191	12815	699	23	0.128150	13974	679	22
17.3	0.133701	14142	628	25	0.141423	12553	741	19
17.4	0.118956	15322	551	26	0.153216	11015	795	17
17.5	0.103110	16342	469	28	0.163420	9377	841	14
17.6	0.086328	17194	383	29	0.171943	7656	879	11
17.7	0.068780	17871	293	30	0.178710	5868	907	8
17.8	0.050646	18366	202	31	0.183663	4033	927	5
17.9	0.032109	18677	108	31	0.186765	2168	937	+ 2
18.0	—0.013356	18799	+ 15	31	0.187995	— 291	938	— 1
18.1	+0.005427	18735	— 79	31	0.187350	+ 1578	930	4
18.2	0.024052	18485	171	30	0.184848	3421	912	7
18.3	0.042336	18052	261	29	0.180523	5220	886	10
18.4	0.060098	17443	348	28	0.174428	6958	851	13
18.5	0.077165	16663	431	27	0.166634	8617	808	16
18.6	0.093371	15722	509	25	0.157225	10182	757	18
18.7	0.108560	14630	582	23	0.146305	11638	698	20
18.8	0.122585	13399	649	21	0.133990	12971	634	22
18.9	0.135315	12041	708	19	0.120408	14169	563	24
19.0	0.146630	10570	761	16	0.105702	15219	487	26
19.1	0.156423	9002	806	14	0.090022	16114	407	27
19.2	0.164607	7353	842	11	0.073529	16844	323	28
19.3	0.171107	5639	870	8	0.056391	17403	236	29
19.4	0.175869	3878	889	5	0.038782	17787	148	29
19.5	0.178854	2088	900	— 2	0.020877	17992	+ 58	30
19.6	0.180041	+ 286	901	+ 1	—0.002857	18019	— 32	30
19.7	0.179427	— 1510	893	4	+0.015101	17866	121	29
19.8	0.177029	3282	877	7	0.032817	17537	208	29
19.9	0.172878	5012	852	10	0.050117	17036	293	28
20.0	+0.167025	— 6683	818	+12	+0.066833	+16368	— 374	—26

Tafel II.

z	J^5	a	b	c	z	J^6	a	b	c
0.0	0.0000000	0	0	0	0.0	0.0000000	0	0	0
0.2	0.0000001	+ 1	+ 8	+ 12	0.2	0.0000000	0	0	+ 1
0.4	0.0000026	65	66	36	0.4	0.0000001	+ 2	+ 3	3
0.6	0.0000199	330	218	74	0.6	0.0000010	19	17	8
0.8	0.0000831	1027	504	123	0.8	0.0000056	82	50	18
1.0	0.0002498	2456	953	180	1.0	0.0000209	247	122	33
1.2	0.0006101	4961	1584	241	1.2	0.0000615	604	245	53
1.4	0.0012901	8910	2397	299	1.4	0.0001523	1275	438	79
1.6	0.0024523	14663	3384	352	1.6	0.0003321	2414	717	110
1.8	0.0042937	22540	4514	394	1.8	0.0006569	4207	1095	144
2.0	0.0070396	32793	5752	423	2.0	0.0012024	6865	1581	182

z	J^8	a	b	c	z	J^9	a	b	c
2.0	0.0000222	+ 174	+ 58	+ 8	2.0	0.0000025	+ 22	+ 9	+ 1
2.2	0.0000464	327	99	16	2.2	0.0000058	46	15	3
2.4	0.0000908	580	159	25	2.4	0.0000123	89	28	5
2.6	0.0001674	980	246	34	2.6	0.0000246	164	48	8
2.8	0.0002937	1584	364	46	2.8	0.0000467	287	77	12
3.0	0.0004934	2463	522	60	3.0	0.0000844	481	119	17
3.2	0.0007983	3699	721	75	3.2	0.0001462	774	177	23
3.4	0.0012483	5386	974	93	3.4	0.0002438	1205	258	31
3.6	0.0018940	7631	1280	111	3.6	0.0003934	1821	362	40
3.8	0.0027967	10544	1642	130	3.8	0.0006160	2675	497	51
4.0	0.0040287	14237	2061	149	4.0	0.0009386	3834	667	62

z	J^{11}	a	b	c	z	J^{12}	a	b	c
4.0	0.0000366	+ 189	+ 43	+ 3	4.0	0.0000062	+ 36	+ 9	+ 2
4.2	0.0000604	296	64	7	4.2	0.0000109	59	14	2
4.4	0.0000972	449	91	11	4.4	0.0000184	94	22	3
4.6	0.0001524	668	129	15	4.6	0.0000303	147	33	4
4.8	0.0002337	974	178	19	4.8	0.0000486	224	47	6
5.0	0.0003509	1392	242	24	5.0	0.0000763	335	65	8
5.2	0.0005168	1952	321	30	5.2	0.0001172	492	92	10
5.4	0.0007473	2691	421	37	5.4	0.0001767	709	126	13
5.6	0.0010623	3650	542	45	5.6	0.0002616	1003	170	17
5.8	0.0014861	4876	688	53	5.8	0.0003807	1397	226	21
6.0	0.0020480	6419	860	61	6.0	0.0005452	1915	295	25

Tafel II.

z	J^{13}	a	b	c	z	J^{14}	a	b	c
6.0	0.0001327	+ 515	+ 89	+ 7	6.0	0.0000297	+ 127	+ 24	+ 3
6.2	0.0001941	725	121	11	6.2	0.0000451	185	34	4
6.4	0.0002798	1002	159	15	6.4	0.0000674	265	47	5
6.6	0.0003974	1367	208	19	6.6	0.0000991	375	64	6
6.8	0.0005569	1842	268	23	6.8	0.0001436	522	85	8
7.0	0.0007702	2450	343	27	7.0	0.0002052	720	114	10
7.2	0.0010523	3221	431	32	7.2	0.0002896	979	148	13
7.4	0.0014209	4185	536	38	7.4	0.0004035	1314	191	16
7.6	0.0018970	5379	661	45	7.6	0.0005557	1747	243	19
7.8	0.0025055	6839	803	51	7.8	0.0007567	2295	307	23
8.0	0.0032749	8604	967	58	8.0	0.0010193	2982	383	28

z	J^{15}	a	b	c	z	J^{16}	a	b	c
8.0	0.0002926	+ 941	+ 135	+11	8.0	0.0000780	+ 273	+ 43	+ 4
8.2	0.0003015	1248	173	14	8.2	0.0001101	373	57	5
8.4	0.0005451	1639	219	17	8.4	0.0001537	504	75	7
8.6	0.0007327	2131	275	20	8.6	0.0002123	675	97	8
8.8	0.0009754	2744	340	24	8.8	0.0002904	895	123	10
9.0	0.0012864	3501	418	28	9.0	0.0003933	1174	157	12
9.2	0.0016813	4427	510	33	9.2	0.0005277	1527	197	15
9.4	0.0021784	5550	615	37	9.4	0.0007017	1968	245	18
9.6	0.0027987	6896	734	43	9.6	0.0009248	2514	303	21
9.8	0.0035661	8497	871	49	9.8	0.0012087	3185	370	24
10.0	0.0045080	10930	1023	56	10.0	0.0015668	4002	449	27

z	J^{18}	a	b	c	z	J^{19}	a	b	c
10.0	0.0001524	+ 463	+ 64	+ 5	10.0	0.0000431	+ 141	+ 21	+ 2
10.2	0.0002056	606	81	6	10.2	0.0000596	189	27	3
10.4	0.0002750	789	103	8	10.4	0.0000815	252	36	3
10.6	0.0003650	1019	128	9	10.6	0.0001106	333	46	4
10.8	0.0004806	1304	159	11	10.8	0.0001489	437	58	5
11.0	0.0006281	1658	195	13	11.0	0.0001990	569	73	6
11.2	0.0008148	2091	239	16	11.2	0.0002638	734	93	7
11.4	0.0010494	2619	291	19	11.4	0.0003472	942	116	8
11.6	0.0013423	3259	350	21	11.6	0.0004538	1199	142	10
11.8	0.0017054	4026	418	24	11.8	0.0005889	1514	175	12
12.0	0.0021522	4939	497	27	12.0	0.0007590	1901	213	14

Tafel II.

z	J^{20}	a	b	c	z	J^{21}	a	b	c
12.0	0.0002512	+ 681	+ 84	+ 7	12.0	0.0000784	+ 228	+ 30	+ 2
12.2	0.0003283	876	103	8	12.2	0.0001045	297	39	3
12.4	0.0004261	1098	128	9	12.4	0.0001384	384	48	4
12.6	0.0005496	1381	156	10	12.6	0.0001820	492	61	5
12.8	0.0007044	1725	189	12	12.8	0.0002378	628	75	6
13.0	0.0008971	2143	230	14	13.0	0.0003087	796	94	6
13.2	0.0011358	2645	274	16	13.2	0.0003984	1004	115	8
13.4	0.0014294	3245	327	19	13.4	0.0005111	1257	139	9
13.6	0.0017885	3957	386	22	13.6	0.0006517	1564	169	11
13.8	0.0022250	4796	455	25	13.8	0.0008261	1935	204	13
14.0	0.0027527	5782	532	28	14.0	0.0010413	2381	243	15

z	J^{23}	a	b	c	z	J^{24}	a	b	c
14.0	0.0001252	+ 331	+ 40	+ 3	14.0	0.0000402	+ 113	+ 15	+ 1
14.2	0.0001626	420	50	4	14.2	0.0000531	146	18	2
14.4	0.0002100	532	62	4	14.4	0.0000697	188	23	2
14.6	0.0002698	669	75	5	14.6	0.0000910	240	29	2
14.8	0.0003447	834	91	6	14.8	0.0001182	306	36	3
15.0	0.0004379	1037	112	7	15.0	0.0001527	387	45	3
15.2	0.0005536	1283	134	8	15.2	0.0001963	488	55	4
15.4	0.0006962	1577	161	10	15.4	0.0002510	610	67	5
15.6	0.0008710	1929	192	11	15.6	0.0003192	760	82	5
15.8	0.0010843	2349	228	13	15.8	0.0004040	942	99	6
16.0	0.0013433	2845	269	15	16.0	0.0005087	1160	120	6

z	J^{25}	a	b	c	z	J^{26}	a	b	c
16.0	0.0001828	+ 446	+ 50	+ 3	16.0	0.0000625	+ 162	+ 20	+ 1
16.2	0.0002328	557	61	4	16.2	0.0000808	206	24	2
16.4	0.0002950	691	73	5	16.4	0.0001040	260	30	2
16.6	0.0003719	853	90	6	16.6	0.0001332	326	37	3
16.8	0.0004668	1050	107	6	16.8	0.0001698	408	45	3
17.0	0.0005832	1284	128	7	17.0	0.0002154	507	55	4
17.2	0.0007252	1564	152	9	17.2	0.0002720	628	66	4
17.4	0.0008977	1896	181	10	17.4	0.0003419	774	80	5
17.6	0.0011064	2288	211	11	17.6	0.0004278	949	95	6
17.8	0.0013575	2747	249	13	17.8	0.0005328	1158	115	7
18.0	0.0016585	3286	290	15	18.0	0.0006608	1408	136	8

Tafel II.

z	J^{27}	a	b	c	z	J^{28}	a	b	c
18.0	0.0002505	+ 570	+ 59	+ 4	18.0	0.0000906	+ 219	+ 24	+ 1
18.2	0.0003138	701	72	4	18.2	0.0001151	274	30	1
18.4	0.0003915	858	86	5	18.4	0.0001457	340	36	2
18.6	0.0004864	1045	102	6	18.6	0.0001835	420	44	3
18.8	0.0006017	1268	121	7	18.8	0.0002302	518	54	3
19.0	0.0007413	1531	143	8	19.0	0.0002877	635	64	4
19.2	0.0009095	1842	169	9	19.2	0.0003580	775	76	5
19.4	0.0011115	2207	197	10	19.4	0.0004436	942	91	5
19.6	0.0013529	2632	229	11	19.6	0.0005475	1141	108	6
19.8	0.0016402	3127	267	13	19.8	0.0006731	1377	128	7
20.0	0.0019809	3700	307	15	20.0	0.0008243	1654	150	8

Druckfehler.

Seite 43 heisst die Seitenzahl fälschlich 34.

Seite 44, Zeile 6 v. u. statt $J^{\nu+2p+2}$ **l.** $J^{\nu+2p+4}$.

Seite 45, Zeile 8 v. u. statt zd^6 **l.** dz^6.

und es ist damit jedenfalls eine fühlbare Lücke der Litteratur zum Besten der Studierenden ausgefüllt worden. — — Das Werk bietet genug, ja hie und da vielleicht mehr als genug für das erste Studium der genialen Schöpfungen von Legendre, Abel und Jacobi. Die Darstellung muss als sehr deutlich bezeichnet werden u. s. w." [Schlömilch, in der Zeitschrift f. Mathematik, 1862, 1. Heft.]

Durège, Dr. H., ordentlicher Professor am Polytechnicum zu Prag, **Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse.** Mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemann's. gr. 8. 1864. geh. 1 Thlr. 18 Ngr.

„Ich möchte, nach allen diesen Ueberlegungen, das Werk von Durège allen Anfängern empfehlen, welche sich eine erste Kenntniss der modernen mathematischen Anschauungsweisen erwerben wollen. Ich halte dafür, es sei sehr zweckmässig, dass der Lernende ziemlich bald sich an die Betrachtung der Eigenschaften der Functionen gewöhnt. Das gewöhnliche mathematische, mehr rechnende Verfahren, wird durchaus nicht überflüssig durch diese neuere Betrachtungsweise; es lassen sich aber oftmals doch sehr grosse Rechnungen ersparen; ferner, was sowohl für das Studium, als auch für selbstständige Arbeiten von grösstem Werthe ist, die Möglichkeit gewisser Darstellungen (als z. B. der elliptischen Functionen durch die ϑ) lässt sich sofort übersehen; es wird dadurch leichter, den Faden einer gegebenen Rechnung, welche man nachstudirt, zu behalten, und es kann viel zielloses Rechnen bei selbstständigen Arbeiten vermieden werden. Ich empfehle daher das Werk nochmals einem Jeden, welcher sich mit Riemann'schen Arbeiten vertraut machen will, zum Vorstudium." [G. Roch, in der Zeitschrift f. Mathematik, 1865, 4. Heft.]

Fiedler, Dr. Wilhelm, Professor am Polytechnikum zu Prag, **die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen.** Ein Beitrag zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen. gr. 8. 1862. geh. 1 Thlr. 14 Ngr.

Diese Arbeit des rühmlichst bekannten Verfassers ist aus dem Wunsche entsprungen, zur allgemeineren Verbreitung der Kenntnis der von der „neueren Algebra" benutzten Methode beizutragen, und durch ausführlichere Darlegung der betreffenden Theorien für binäre Formen auf Salmon's Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen vorzubereiten.

Fort, O., und O. Schlömilch, Professoren an der Königl. polytechnischen Schule in Dresden, **Lehrbuch der analytischen Geometrie.** Zwei Theile. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Zweite Auflage. gr. 8. 1863. geh. 2 Thlr. 22½ Ngr.

Einzeln:

I. Theil. **Analytische Geometrie der Ebene,** von O. Fort. 1 Thlr. 7½ Ngr.

II. » **Analytische Geometrie des Raumes** von O. Schlömilch. 1 Thlr. 15 Ngr.

Das vorliegende Lehrbuch der analytischen Geometrie ist vorzugsweise für den Unterricht an technischen und anderen höheren Schulen bestimmt. Der ungetheilte Beifall, den dasselbe gefunden, hat bereits eine zweite Auflage nöthig gemacht. Wo die fernere Einführung beabsichtigt wird, stellt die Verlagshandlung dem betreffenden Lehrer gern ein Freiexemplar behufs vorheriger Prüfung zur Verfügung.

Fuhrmann, Dr. Arwed, Assistent für Mathematik und Vermessungslehre an der königl. polytechnischen Schule zu Dresden, **Aufgaben aus der analytischen Mechanik.** Mit einem Vorworte von Prof. Dr. O. Schlömilch. In zwei Theilen. Erster Theil: Aufgaben aus der analytischen Geostatik. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten. gr. 8. 1867. 20 Ngr.

Hartig, Dr. Ernst, Professor der mechanischen Technologie an der k. polytechnischen Schule in Dresden, **die Dampfkessel-Explosionen.** Beiträge zur Beurtheilung der Maassregeln für ihre Verhütung. Mit lithographierten Tafeln. gr. 8. 1867. geh. 20 Ngr.

Hesse, Dr. Otto, ord. Professor an der Universität zu Heidelberg, **Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes,** insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung. gr. 8. 1861. geh. 2 Thlr. 12 Ngr.

„Ungeachtet des bedeutenden Aufschwunges, welchen die analytische Geometrie namentlich im Verlaufe des letzten Vierteljahrhunderts einerseits durch die Erweiterung des Coordinatenbegriffes, andererseits durch die Fortschritte der algebraischen Methoden, besonders in der Theorie der Determinanten und der homogenen Functionen, genommen hat, fehlte es doch noch bis vor Kurzem an einem Lehrbuche, welches geeignet gewesen wäre, den Studierenden der Mathematik zur Einführung in diese neueren Disciplinen zu dienen. Für die analytische Geometrie der Ebene ist zu diesem Zwecke den deutschen Jüngern der Wissenschaft ein wichtiges Hilfsmittel in der Fiedler'schen Uebertragung des Salmon'schen Werkes in die Hand gegeben worden; für die des Raumes wird die erwähnte Lücke unserer mathematischen Literatur auf eine ausgezeichnete Weise durch das vorliegende Lehrbuch ausgefüllt. Dass der Verfasser desselben vor Allen berechtigt war, in diese Lücke einzutreten, dazu hat er sich den Anspruch durch seine rüstige Mitwirkung am Ausbau sowohl der analytisch-geometrischen Methoden, als der hiermit im Zusammenhange stehenden Theile der Algebra erworben; ein Blick in die letzten zwanzig Jahrgänge von Crelle's Journal wird genügen, ihm diese Berechtigung zuzuerkennen. Gegenüber der Stellung des Verfassers

auf dem Gebiete der Wissenschaft muss Referent von einer kritischen Besprechung des vorliegenden Werkes absehen, umsomehr, als dieselbe nur auf Anerkennung des darin dargelegten Talentes und der Meisterschaft in der Darstellungsweise hinauslaufen könnte. — [Folgt Inhaltsangabe.] Für Leser, welche mit den nöthigen Vorkenntnissen ausgerüstet, Zugang zu den neueren analytisch-geometrischen Theorien erhalten wollen, kann das vorliegende Werk als eines der wichtigsten Hilfsmittel bezeichnet werden u. s. w." [O. Fort, in der Zeitschrift für Mathematik, 1862, 2. Heft.]

Hesse, Dr. Otto, ord. Professor an der Universität zu Heidelberg, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. gr. 8. geh. 1 Thlr. 10 Ngr.

„Man kann ohne Uebertreibung behaupten, dass es sehr wenige Bücher giebt, die auf dem kleinen Raume von 182 Seiten eine solche Fülle von Material in einer so eleganten und durchaus klaren Darstellung bieten u. s. w." [Schlömilch, in d. Zeitschr. f. Mathem. 1866. 2. Heft.]

——— vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie. Separatabdruck a. d. Zeitschr. f. Mathem. u. Physik. gr. 8. 1866. geh. 16 Ngr.

Kahl, Dr. E., Lehrer der Physik an der Kriegsschule in Dresden, mathematische Aufgaben aus der Physik nebst Auflösungen. Zum Gebrauche höherer Schulanstalten und zum Selbstunterricht bearbeitet. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. 2 Theile. gr. 8. 1857. geh. 1 Thlr. 14 Ngr.

Einzeln:

I. Theil. **Aufgaben.** n. 24 Ngr. II. Theil. **Auflösungen.** n. 20 Ngr.

„Je zahlreicher und umfänglicher man Aufgaben-Sammlungen aus dem Gebiete der reinen Mathematik besitzt, desto seltener und verhältnismässig weniger ausführlich hat man sie für angewandte Mathematik und für Physik. Insofern ist daher schon jeder Beitrag für die specielle Literatur letzteren Gegenstandes als eine ebenso erwünschte wie dankenswerthe Erscheinung auf dem Büchermarkte zu betrachten, wie auch übrigens der Verfasser bei Bearbeitung einer selbstständigen Sammlung dieser Art zu Werke gegangen sein mag. Wir brauchen indessen bezüglich vorliegender Sammlung bei diesem einfachen und allgemeinen Urtheile nicht stehen zu bleiben, vielmehr wird Jeder nach Einsicht in dieselbe darin mit uns übereinstimmen, dass dieselbe für den Schul- und Privatgebrauch ein recht instructives Hilfsmittel zur Aneignung und zum klaren Verständnis der Hauptlehren der Physik darbietet. Sie unterscheidet sich zunächst von anderen derartigen Sammlungen, z. B. von der Fliedner'schen, auch darin, dass der Gebrauch der Differential- und Integralrechnung für einzelne Beispiele nicht ausgeschlossen ist, ohne jedoch die Kenntnis dieses Theiles der Mathematik durchgängig vorauszusetzen, indem die Mehrzahl der Beispiele davon unabhängig gestellt ist." [Witzschel, in d. Zeitschr. f. Mathem. 1858, 6. Heft.]

Kohl, Friedrich, Elemente von Maschinen zunächst als ein Leitfaden für Gewerbschüler. I. u. II. Abth. in einem Bde. Mit 31 lith. Tafeln u. 157 in d. Text gedr. Holzschn. Zweite Ausg. 4. 1858. geh. 1 Thlr. 24 Ngr.

Kröhnke, H., Civilingenieur und bestallter Landmesser, Handbuch zum Abstecken von Curven auf Eisenbahn- und Wegelinien. Für alle vorkommenden Winkel und Radien aufs Sorgfältigste berechnet und herausgegeben. Fünfte durchg. Aufl. Mit einer Figurentafel. 8. 1867. geb. 18 Ngr.

„Vorstehendes Taschenbuch, welches sich durch concise Form und Bequemlichkeit für den Gebrauch jedem praktischen Geometer und Ingenieur empfiehlt, enthält alle diejenigen Daten, welche erforderlich sind, um nach der Methode, von den Tangenten und Hülfstangenten aus den Bogen zu bestimmen, Curven für Strassen- und Eisenbahnanlagen abzustecken. Die Einleitung enthält eine kurze, dabei aber sehr klare und bündige Instruction für die Ausführung der beim Abstecken der Curven vorkommenden geometrischen Operationen, für die Behandlung der zu diesem Zwecke erforderlichen Instrumente und für den Gebrauch der den Hauptinhalt des Taschenbuchs bildenden beiden Tabellen. Von diesen Tabellen enthält die erste die Werthe der Tangente, Bogenlänge, halben Sehne, der Coordinaten des Mittelpunktes und dessen Abstandes vom Winkelpunkt der Curve für den Radius 1000 und die Grösse des Centriwinkels von 0 bis 120 Grad, um 2 Minuten jedesmal wachsend. Die zweite Tabelle enthält die Abscissen und Ordinaten zur Absetzung äquidistanter Bogenpunkte für alle vorkommenden Radien von 10 bis 10,000. Mehrfache Revisionen berechtigen den Herrn Verfasser, wie er in der Vorrede sagt, beide Tabellen als vollkommen fehlerfrei und zuverlässig zu bezeichnen." [Eisenbahnzeitung 1852, Nr. 26.]

Lindelöf, Dr. L., Professeur de Mathématiques à Helsingfors, leçons de calcul des variations. Redigées en collaboration avec M. L'abbé Moigno. Paris 1861. gr. 8. geh. 1 Thlr. 20 Ngr.

Matthiesen, Ludwig, Dr., Subrector und Lehrer der Mathematik am Gymnasium zu Husum, die algebraischen Methoden der Auflösung der litteralen quadratischen, cubischen und biquadratischen Gleichungen. Nach ihren Principien und ihrem inneren Zusammenhange dargestellt. Erste Serie, enthaltend: Substitutions-Methoden. gr. 8. 1866. geh. 15 Ngr.

Mayer, Dr. **Adolph**, Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima der einfachen Integrale. gr. 8. geh. 20 Ngr.

Mittheilungen der K. Sächs. Polytechnischen Schule zu Dresden. Heft I. A. u. d. T.: Versuche über den Kraftbedarf der Maschinen in der Streichgarnspinnerei und Tuchfabrikation, ausgeführt von Dr. Ernst Hartig, Lehrer der mechan. Technologie an der Kgl. Polytechn. Schule. Unter Mitwirkung der Polytechniker Arndt, Jüngling, Klien und Künzel. [VIII u. 72 S. mit 11 lithographierten Tafeln in 4. u. qu. Folio.] hoch 4. geh. 1 Thlr. 10 Ngr.

Müller, Dr. J. H. T., Oberschulrath etc., Beiträge zur Terminologie der Griechischen Mathematiker. gr. 8. 1860. geh. n. 8 Ngr.

„Es sind nur 2½ Druckbogen, welche der Verfasser unter dem Titel von Beiträgen veröffentlicht, aber wer den Inhalt prüft, wird über die Fülle erstaunen, welche in dem kleinen Raume zusammengedrängt ist u. s. w." [Zeitschrift für Mathematik 1860, 6. Heft.]

Neumann, Carl, ord. Professor in Tübingen, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Holzschnitten und einer lithographierten Tafel. gr. 8. geh. 3 Thlr. 20 Ngr.

Eine Darstellung der Theorie der Abel'schen Integrale, durch welche dieselbe auch denen verständlich wird, deren mathematische Kenntnisse noch gering sind. Der Student, welcher sein erstes oder seine beiden ersten Semester einigermassen gut angewendet hat, soll durch dieses Buch in den Stand gesetzt werden, in das Innere jener schwierigen und bis jetzt fast vollständig unzugänglichen Theorie sofort und mit vollem Verständnis einzudringen.

——— das Dirichlet'sche Princip in seiner Anwendung auf die Riemann'schen Flächen. gr. 8. 1865. geh. 18 Ngr.

——— die Haupt- und Brenn-Puncte eines Linsen-Systemes. Elementare Darstellung der durch Gauss begründeten Theorie. gr. 8. 1866. geh. 15 Ngr.

——— Theorie der Bessel'schen Functionen. Ein Analogon zur Theorie der Kugelfunctionen. gr. 8. 1867. geh. 20 Ngr.

Plücker, Julius, neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Mit einem Vorwort von A. Clebsch. Erste Abtheilung. gr. 4. 1868. geh. 3 Thlr.

Roch, Dr. G., de theoremate quodam circa functiones Abelianas. 4. geh. 6 Ngr.

Ruete, Dr. C. G. Th., Professor und Geh. Medicinalrath, das Stereoscop. Eine populäre Darstellung. Mit 27 stereoscopischen Bildern in einer Beilage. Zweite durchaus neu bearbeitete Auflage. gr. 8. 1867. geh. 2 Thlr.

Reiss, M., Beiträge zur Theorie der Determinanten. gr. 4. 1867. geh. 1 Thlr.

Salmon, George, analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Unter Mitwirkung des Verfassers deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler. Zweite umgearbeitete und verbesserte Auflage. gr. 8. 1866. geh. 4 Thlr.

„Es kann das Werk in der vorliegenden Form der aufmerksamen Beachtung aller Studierenden der Mathematik empfohlen werden, welche auf möglichst einfachem Wege Zugang zu den Resultaten der neueren Forschungen auf dem Gebiete der analytischen Geometrie erlangen wollen; dem Lehrer der Wissenschaft empfiehlt es sich, abgesehen von der vorzüglichen Methodik des Verfassers, welche in der deutschen Bearbeitung durchaus nicht beeinträchtigt ist, namentlich noch durch die grosse Menge von mehr als vierhundert grossentheils vollständig durchgeführten Aufgaben." [O. Fort, in der Zeitschrift für Mathematik 1861, 3. Heft.]

Salmon, George, Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen. Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler. gr. 8. 1863. geh. 1 Thlr. 24 Ngr.

Diese deutsche Ausgabe von Rev. George Salmon's „Lessons introductory to the modern higher Algebra" ist in einigen Punkten verändert, in andern erweitert und nach dem Stande der Entdeckungen vervollständigt worden. Der Theorie der symmetrischen Determinanten ist eine Vorlesung gewidmet, überhaupt die Determinantentheorie vielfach erweitert, namentlich auch die Zahl der Beispiele vermehrt worden. Diese Erweiterung steht in Verbindung mit der volländigeren Behandlung der Theorie der Jacobi'schen und derjenigen der Hesse'schen Determinante, welche als Beispiele für eine Form der Behandlung gegeben sind, die in analytischer Beziehung unleugbare Vorzüge vor derjenigen hat, durch die der Grundcharacter des Originals bestimmt ist. In der Uebersicht der Resultate der Theorie für die biquadratischen ternären Formen ist auf die schönen Untersuchungen von Clebsch Bezug genommen und ein kurzer Abriss der Resultate gegeben worden, welche die algebraische Theorie der binären und ternären Formen für die elliptischen Transcendenten ans Licht gebracht hat. — Das Buch schliesst sich in seiner Bedeutung für die mathematischen Studien dem vorhergehenden Werke desselben Verfassers würdig an.

——— analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, ord. Professor der descriptiven Geometrie am Polytechnicum zu Prag. 2 Theile. gr. 8. 1863. 1865. geh. 5 Thlr. 14 Ngr.

Einzeln:

I. Theil: A. u. d. T.: Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes und die Theorie der Flächen zweiten Grades. Ein Lehrbuch für höhere Unterrichtsanstalten. gr. 8. geh. 1 Thlr. 24 Ngr.

II. Theil: A. u. d. T.: Analytische Geometrie der Curven im Raume und der algebraischen Flächen. gr. 8. geh. n. 3 Thlr. 20 Ngr.

„Die ausgezeichnete Begabung des Verfassers für die Darstellung analytisch-geometrischer Untersuchungen, als auch die Tüchtigkeit des Herrn Uebersetzers sind so anerkannt, dass es unnöthig erscheint, irgend etwas zur Empfehlung des vorliegenden Werkes hinzuzufügen."
[Literar. Centralblatt, 1864, Nr. 38.]

Scheffler, Dr. Hermann, Herzogl. Braunschweig. Baurath, imaginäre Arbeit, eine Wirkung der Centrifugal- und Gyralkraft, mit Anwendungen auf die Theorie des Kreisels, des rollenden Rades, des Polytrops, des rotirenden Geschosses und des Tischrückens. Mit 23 in den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8. 1866. geh. 15 Ngr.

Schell, Dr. Wilhelm, Professor am Polytechnikum zu Carlsruhe, Theorie der Bewegung und der Kräfte. Ein Lehrbuch der theoretischen Mechanik, mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse technischer Hochschulen. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. 1. Lieferung. gr. Lex.-8. 1868. geh. 28 Ngr.

Erscheint in circa 5 Lieferungen von je 12 Druckbogen à 28 Ngr. die Lieferung und wird binnen Jahresfrist vollendet sein.

——— allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung. Mit Holzschnitten. gr. 8. 1859. geh. 24 Ngr.

Schlömilch, Dr. Oscar, Kgl. Sächs. Hofrath, Professor an der polytechnischen Schule zu Dresden, Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Erster Theil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. Mit Holzschnitten im Texte. gr. 8. 1868. geh. 1 Thlr. 18 Ngr.

Schmidt, Carl Heinrich, Professor an der polytechnischen Schule in Stuttgart, Lehrbuch der Spinnereimechanik. Mit einem Atlas von 13 lithograph. Tafeln. gr. 8. 1857. (Der Atlas quer-Folio). n. 3 Thlr.

Schneitler, Dr. C. F., Civilingenieur, die Instrumente und Werkzeuge der höheren und niederen Meßkunst, sowie der geometrischen Zeichenkunst, ihre Theorie, Construction, Gebrauch und Prüfung. Mit 236 in den Text gedruckten Holzschnitten. Vierte sehr verbesserte und vermehrte Auflage. gr. 8. 1861. geh. 1 Thlr. 15 Ngr.

——— Lehrbuch der gesammten Meßkunst oder Darstellung der

Theorie und Praxis des Feldmessens, Nivellirens und Höhenmessens, der militärischen Aufnahmen ganzer Länder, sowie der geometrischen Zeichenkunst. Zum Selbststudium und Unterrichte bearbeitet. Dritte verbesserte Auflage. Mit 225 Holzschnitten. gr. 8. 1861. geh. 2 Thlr.

Die geodätischen Werke Schneitler's entsprechen so sehr einem praktischen Bedürfnisse, dass ihre Verbreitung in fortwährendem Steigen begriffen ist. Die vorliegende dritte Auflage des „Lehrbuchs der Messkunst“, welches mit dem gleichzeitig in vierter Auflage erschienenen Werke: „die Instrumente und Werkzeuge der Messkunst“ ein Ganzes bildet, ist eine wesentlich verbesserte. Insbesondere ist der ganze Abschnitt „Nivelliren“ durch Herrn Regierungsconducteur Stocken in Breslau vollständig neu bearbeitet und damit das Buch gerade in einer Partie erweitert worden, deren genaue Kenntnis in unserer Zeit von besonderer Bedeutung für die grossartigen Landes-Meliorationen (Bruch- und Moorbauten, Drain-Anlagen) ist. Der Preis ist ausserordentlich billig

Schneitler, Dr. C. F., und Julius Andrée, Civilingenieurs, Sammlung von Werkzeichnungen landwirthschaftlicher Maschinen und Geräthe nebst ausführlichen Beschreibungen. 7 Hefte. Mit 42 Tafeln in gr. Royal-Fol. Text in 4. 1853—1857. geh. 38 Thlr.

Einzeln:

I. Heft, die Drainröhren- und Ziegelpressen auf 7 Foliotafeln: 1) Randell und Sanders Thonröhrenpresse mit mechanischer Abschneide-Vorrichtung; 2) Drainröhrenpresse von Egells in Berlin; 3) Doppeltwirkende Drainröhrenpresse von J. Whitehead in Preston; 4) Drainröhrenpresse von J. Williams in Bedford; 5) Doppelwirkende Drainröhrenpresse von Borie Frères in Paris; 6) Drainröhrenpresse von Mundscheid in Malapane; 7) einfache englische Röhrenpresse. 1853. n. 6 Thlr.

II. Heft, mit 6 Tafeln: 1) Verbesserte Flachs-Brechmaschine von Kuthe; 2) Flachsschwinge-Maschine von J. Bücklers; 3) Patentirter Apparat und Verfahren der Flachs-Dampfröste von Watt in Irland; 4) E. Kaemmerer's Universal-Säe-Maschine. 1853. n. 6 Thlr.

III. Heft, mit 6 Tafeln: 1) Transportabler Cylindergöpel von Barret, Exall u. Andrews in Reading; 2) transportables deutsches Rosswerk; 3) Häckselschneide-Maschine nach Gillet; Schrotmühle mit Stahlwalzen. 1854. n. 6 Thlr.

IV. Heft oder II. Serie 1. Heft, mit 6 Tafeln: 1) Englische Dreschmaschine; 2) Salmon's Häckselschneide-Maschine; 3) Bedford-Eggen. 1855. n. 6 Thlr.

V. Heft, oder II. Serie 2. Heft, mit 6 Tafeln: Thonschlemmerei zu Joachimsthal; Göpel von Pinet; Romaine's Dampfgrabe-Maschine. 1856. n. 6 Thlr.

VI. u. VII. (Doppel)Heft, oder II. Serie 3. u. 4. Heft, a. u. d. T.: Die neueren Dampfcultur-Geräthe und Dampfpflüge Englands. Von Dr. C. F. Schneitler. Mit 11 Tafeln. 1857. n. 8 Thlr.

Heft 1—3 herausgegeben von C. F. Schneitler, Heft 4—7 oder II. Serie 1—4. Heft von C. F. Schneitler und J. Andrée.

Schneitler, Dr. C. F., und Julius Andree, Civil-Ingenieurs, die neueren und wichtigeren landwirthschaftlichen Maschinen und Geräthe, ihre Theorie, Construction, Wirkungsweise und Anwendung. Ein Handbuch der landwirthschaftlichen Maschinen- und Geräthekunde zum Selbststudium und Unterricht. Mit 350 in den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8. 1862. geh. 3 Thlr.

„Das neueste und vollständigste Buch über landwirthschaftliche Maschinen und Geräthe, welches durch seine vozüglich klaren und anschaulichen Abbildungen wie durch seinen gediegenen beschreibenden Text die vollste Anerkennung bei allen gefunden hat, die als Landwirthe oder Techniker mit den landwirthschaftlichen Maschinen und Geräthen sich näher bekannt zu machen Veranlassung haben. Wir können nur wiederholen, dass wir es hier mit einem gediegenen, der wärmsten Empfehlung werthen Werke zu thun haben. Alle Landwirthe, welche den Fortschritt in ihrem ehrenwerthen Berufe mit Freuden begrüssen, können „diese“ Maschinen- und Geräthe- Kunde gar nicht entbehren, und legen wir besonders auch allen Mitgliedern unseres Vereins die Anschaffung desselben ans Herz.“

[Landwirthschaftliche Mittheilungen (Neuhaldensleben) 1859, Nr. 4.]

Schrödter, J. G., faßliche Anleitung zum gründlichen Unterricht in der Algebra. Nach Beispielen aus den in Meier Hirsch's Sammlung enthaltenen Gleichungen und Aufgaben. gr. 8. 1850. geh. 1 Thlr. 9 Ngr.

Neben einer sehr klaren Darstellung der algebraischen Lehrsätze enthält das Buch ausführliche Auflösungen aller in Meier Hirsch's Sammlung enthaltenen algebraischen Aufgaben, welche dasselbe vorzugsweise zum Selbstunterricht in der Algebra geeignet machen.

Serret, J. A., Handbuch der höheren Algebra. Deutsch bearbeitet von G. Wertheim. Erster Band. gr. 8. 1868. geh. 2 Thlr. 20 Ngr.

Stamm, Ernst, theoretische und praktische Studien über den Selfactor oder die selbstthätige Mule-Feinspinnmaschine. Aus dem Französischen übersetzt von Ernst Hartig. Mit einem Vorwort

von Dr. J. A. Hülsse, Director der polytechnischen Schule in Dresden. Mit 10 Kupfertafeln (in qu.-Fol. u. Imp.-Fol.) I. Heft: Text. II. Heft: Kupfertafeln. gr. 4. 1862. geh. 4 Thlr.

Steiner's, Jacob, Vorlesungen über synthetische Geometrie. 2 Bände.

I. Band: Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung. Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Jacob Steiner's bearbeitet von Dr. C. F. Geiser, Docent der Mathematik in Zürich. Mit vielen Holzschnitten. gr. 8. 1867. geh. 1 Thlr. 20 Ngr.

II. Band: Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektivische Eigenschaften. Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Jacob Steiner's bearbeitet von Dr. Heinrich Schröter, ordentl. Professor a. d. Universität zu Breslau. Mit vielen Holzschnitten. gr. 8. 1867. geh. 4 Thlr.

Vorlaender, I. I., Königl. Preuss. Cataster-Inspector und Steuerrath, Ausgleichung des Fehlers polygonometrischer Messungen. gr. Lex.-8. 1858. geh. 15 Ngr.

——— über die Berechnung der Flächen-Inhalte ganz oder überwiegend aus Originalmaassen. gr. Lex.-8. 1858. geh. 20 Ngr.

Weber, M. M. Freih. von, Ingenieur, Königl. Sächs. Eisenbahn-Director etc., die Technik des Eisenbahn-Betriebes in Bezug auf die Sicherheit desselben. gr. 8. 1854. geh. 1 Thlr. 15 Ngr.

Das vorliegende, von der Kritik einstimmig als jedem Techniker und Eisenbahnbeamten *unentbehrlich* bezeichnete Werk behandelt den technischen Eisenbahnbetrieb in Bezug auf die Sicherheit desselben in folgenden Hauptabtheilungen, deren jede wiederum in eine grosse Anzahl von Unterabtheilungen zerfällt, so dass nichts unerörtert bleibt, was nur irgend für den behandelten Gegenstand in Frage kommen kann, nämlich:

I. Wege und Werke. a. Oberbau. b. Unterbau. c. Bahnbewachung. d. die Stationen. **II. Betriebsmittel.** a. Locomotiven. b. Personenwagen. c. Güterwagen. **III. Bewachung. IV. Signale. V. VI. Böswilligkeit, Unregelmässigkeit, atmosphärische Einflüsse &c. VII. Assecuranzen.** Schlusswort.

——— die rauchfreie Verbrennung der Steinkohle, mit specieller Rücksicht auf C. J. Duméry's Erfindung. Mit 3 lith. Tafeln. gr. 8. 1859. geh. 18 Ngr.

Durch die Erfindung Duméry's ist ein lange angestrebtes Ziel, wenn auch vielleicht nicht vollständig erreicht, doch näher gerückt, als durch alle früheren Bemühungen. Die vorliegende Schrift beleuchtet die Duméry'schen Vorkehrungen zur rauchfreien Verbrennung der Steinkohlen und macht dieselben durch detaillierte Zeichnungen anschaulich.

——— die Lebensversicherung der Eisenbahn-Passagiere in Verbindung mit der Unterstützung und Pensionirung der Eisenbahn-Beamten und ihrer Angehörigen. gr. 8. 1855. geh. 12 Ngr.

Der Verfasser weist nach, mit welchen Mitteln die Eisenbahn-Verwaltungen ohne fühlbaren Druck auf das Publikum sich von der Sorge um die Beschaffung der Geldmittel für die Pensionierung und Unterstützung der Beamten, diese selbst aber von der schweren Last der Beisteuer zu den Unterstützungscassen befreien können.

——— die Gefährdungen des Personals beim Maschinen- und Fahrdienst der Eisenbahnen. Eine Denkschrift. gr. 8. 1862. geh. 12 Ngr.

Dieses Schriftchen ist speciell dem Wohle der Eisenbahn-Beamten und Arbeiter gewidmet. Die auf langjährige Erfahrung gestützten Vorschläge des rühmlichst bekannten Verfassers haben bereits vielseitige Berücksichtigung gefunden.

Wiener, Dr. Christian, Professor an der Polytechnischen Schule zu Carlsruhe, über Vielecke und Vielflache. [VIII u. 31 S. mit 3 lithographierten Tafeln.] gr. 4. geh. 24 Ngr.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

die Aufgabe, den Leser auf dem kürzesten Wege in die allgemeine Theorie der Elasticität und Capillarität einzuführen und über die Hauptresultate, zu denen bisher die mathematische Physik in diesen Disciplinen gelangte, zu orientieren. Demnach werden zuerst die allgemeinen Gesetze der Elasticitätskraft und des Elasticitätsgleichgewichtes entwickelt, zwei allgemeine Gruppen von Verschiebungen näher erörtert, und dann die Elasticitätsgleichungen auf eine Reihe von Beispielen angewandt. In einem zweiten Abschnitte werden dann die Resultate der mathematischen Theorie mit den Ergebnissen der Erfahrung verglichen und zu dem Ende die Ausdehnung, Compression, Torsion und Biegung für besonders wichtige Fälle näher behandelt. Im dritten Abschnitte werden zuerst die allgemeinen Gleichungen für die oscillatorischen Bewegungen isotroper Körper aufgestellt und dann auf eine Reihe von Beispielen derartiger Bewegungen, sowohl mit als ohne Dilatation, angewandt. Der vierte Abschnitt beschäftigt sich wieder mit der Vergleichung der Theorie und der Erfahrung, wobei die wichtigsten Fälle der Longitudinal-, Transversal- und Torsionsschwingungen ihre Erledigung finden.

Die Theorie der Capillarität beginnt mit der Ableitung der allgemeinen Variationsformel, welche die in Rede stehenden Erscheinungen darstellt; dann werden die Niveauänderungen behandelt, welche in einer Flüssigkeit durch eine oder zwei eingetauchte Platten hervorgerufen werden, worauf die Capillarerscheinungen an Röhren folgen. Ein folgender Abschnitt behandelt die Modification des hydrostatischen Druckes, sowie die Anziehungs- und Abstossungserscheinungen, welche durch die Capillarwirkungen verursacht werden. Den Schluss bildet die Untersuchung der Gleichgewichtsflächen einer ruhenden sowohl als einer rotierenden, der Schwerkraft entzogenen Flüssigkeit unter fortwährender Bezugnahme auf die einschlägigen Plateau'schen Versuche. Von den Meridiancurven der hier zur Sprache kommenden Rotationsflächen sind Zeichnungen beigegeben.

Die mathematischen Entwicklungen sind, um das Verständnis möglichst zu erleichtern, vollständig mitgetheilt; die Behandlung ist meist eigenthümlich. Das Buch befindet sich im Druck und wird zu Michaelis d. J. erscheinen.

Die Lehre von der Transformation, der Multiplication und den Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Von Leo Koenigsberger, Prof. an der Universität zu Greifswald. gr. 8.

Die Lehre von der Transformation der elliptischen Functionen nebst der dahin gehörigen Multiplication sowie die Theorie der Modulargleichungen, welche in der neuesten Zeit in der Zahlentheorie und Algebra von grosser Bedeutung geworden, sind einerseits in all' den über elliptische Functionen veröffentlichten Werken, deren wir jetzt sehr schätzenswerthe besitzen, entweder gar nicht oder nur ganz nebensächlich behandelt, andererseits findet man in den Specialabhandlungen, die diese algebraischen Theile der elliptischen Functionen betreffen, vielfach, dass die dort angewandten Methoden nicht überall Klarheit und Durchsichtigkeit gewähren, dass Manches unstreng, Manches zu wenig verallgemeinert, Vieles gar nicht behandelt ist. Der Verfasser hat diese Theorieen nach Methoden bearbeitet, deren Urheber zum Theil Hermite ist, und die er in seinen Arbeiten über die Transformation der Abel'schen Transcendenten als brauchbar und naturgemäss erkannt hat.

Da allmählig sämmtliche Theile dieser Theorieen in die Arbeit mit hineingezogen werden mussten, so hat sich das Ganze zu einem Lehrbuche der algebraischen Theile der elliptischen Functionen umgestaltet, von denen nur die Lehre von der Division ausgeschlossen worden ist. Das auf einen Umfang von 15 Bogen berechnete Werkchen wird im September 1868 versandt werden.

II. Erschienene Bücher. 1868.

Bardey, E., algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. gr. 8. 1868. geh. 1 Thlr. 10 Ngr.

Durège, Dr. H., ordentlicher Professor am Polytechnicum zu Prag, Theorie der elliptischen Functionen. Versuch einer elementaren Darstellung. Zweite Auflage. Mit 32 in den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8. 1868. geh. 3 Thlr.

Plücker, Julius, neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Mit einem Vorwort von A. Clebsch. Erste Abtheilung. gr. 4. 1868. geh. 3 Thlr.

Schell, Dr. Wilhelm, Professor am Polytechnicum zu Carlsruhe, Theorie der Bewegung und der Kräfte. Ein Lehrbuch der theoretischen Mechanik, mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse technischer Hochschulen. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. 1. Lieferung. gr. Lex.-8. 1868. geh. 28 Ngr.

Erscheint in circa 5 Lieferungen von je 12 Druckbogen à 28 Ngr. die Lieferung und wird binnen Jahresfrist vollendet sein.

Schlömilch, Dr. Oscar, Kgl. Sächs. Hofrath, Professor an der polytechnischen Schule zu Dresden, Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Erster Theil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. Mit Holzschnitten im Texte. gr. 8. 1868. geh. 1 Thlr. 18 Ngr.

Serret, J. A., Handbuch der höheren Algebra. Deutsch bearbeitet von G. Wertheim. Erster Band. gr. 8. 1868. geh. 2 Thlr. 20 Ngr.

